

Banachalgebren stetiger Funktionen auf kompakten Räumen

von

OTTO FORSTER

1961

BANACHALGEBREN
STETIGER FUNKTIONEN
AUF KOMPAKTEN RÄUMEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt von Otto Forster aus München

Mai 1961

Berichterstatter: Professor Dr. K. Stein

Tag der mündlichen Prüfung: 26 Juli 1961

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
A. Vorbereitungen	
1. Ringe, Algebren, Funktionalgebren	7
2. Banachalgebren	10
3. Gelfanddarstellung einer Banachalgebra	15
B. Theorie der algebrierten Räume	
4. Grundlegende Definitionen	21
5. Morph-separable Räume	26
6. Morph-konvexe Räume	29
7. Die Morphiehülle eines algebrierten Raums	33
8. Der Šilovrand eines algebrierten Raums	38
9. Definitionsmethoden für eine algebrierte Struktur	45
10. Teilräume eines algebrierten Raums	48
11. Direkte Summe und Tensorprodukt	51
12. Einbettung in den Polyzylinder	58
C. Anwendungen und Beispiele	
13. Approximation stetiger Funktionen	62
14. Polynomkonvexe Mengen. Šilovrand	66
15. Hilfsmittel aus der Funktionentheorie	71
16. Holomorphe Funktionen von morphen Funktionen	77
17. Morph-vollständige Räume in der Funktionentheorie	82
Literaturverzeichnis	89



EINLEITUNG

In der Mathematik bedeutet es oft eine große Vereinfachung, wenn man bei der Behandlung einer Theorie ganz „vergißt“, woher sie stammt, und sie unabhängig auf einige einfache Axiome aufbaut, Axiome, die vielleicht früher als mehr oder weniger tiefliegende Sätze aufgetreten sind. Ein solches Verfahren kann die Theorie viel klarer machen und zu beträchtlichen Verallgemeinerungen führen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun versucht, eine Art von Funktionentheorie axiomatisch aufzubauen. Inspiriert wurde die Arbeit von der Theorie der geringten Räume und der Funktionentheorie mehrerer komplexen Veränderlichen mit ihren Begriffsbildungen wie den holomorph-separablen, holomorph-konvexen und holomorph-vollständigen Räumen und den Holomorphiehüllen.

Wir betrachten einen kompakten Raum X und zeichnen auf ihm gewisse stetige, komplexwertige Funktionen als „morph“ aus, wobei nur folgende drei Axiome erfüllt sein sollen: 1. Die konstanten Funktionen sind morph. 2. Sind zwei Funktionen morph, so sind auch ihre Summe und ihr Produkt morph.

3. Konvergiert eine Folge von morphen Funktionen gleichmäßig, so ist auch ihr Grenzwert eine morphische Funktion.

Man sieht, daß unter diesen Umständen die Gesamtheit $\mathcal{F}$ der morphen Funktionen eine Banachalgebra bildet. Wir nennen deshalb das Paar $(X, \mathcal{F})$ einen algebrierten Raum. Sind auf den kompakten Räumen X und Y die morphen Funktionen ausgezeichnet, so wird eine stetige Abbildung ϕ von X in Y

morph genannt, wenn für jede morph Funktion g auf Y die Funktion $g \cdot \phi$ auf X morph ist.

Man sieht aus den gegebenen Definitionen, daß es nicht möglich ist, den algebrierten Raum als eine Verallgemeinerung des komplexen Raumes aufzufassen, da erstens nur kompakte Räume betrachtet werden und zweitens nur die globale Struktur berücksichtigt wird. Aber immerhin ist der algebrierte Raum ein Analogon zum komplexen Raum und es ist interessant zu sehen, wie mit einfachen Hilfsmitteln Sätze bewiesen werden können, deren Analoga in der Funktionentheorie nur auf sehr komplizierte Weise oder noch überhaupt nicht bewiesen werden konnten. Es gibt auch Anwendungen der Theorie der algebrierten Räume in der Funktionentheorie, die darauf beruhen, daß man kompakte Teile komplexer Räume zu algebrierten Räumen macht.

In der von I.M.Gelfand entwickelten Theorie der kommutativen Banachalgebren spielt eine fundamentale Rolle die Untersuchung der Homomorphismen der Banachalgebra auf den Körper der komplexen Zahlen (vgl. [GRS]). Dies wird auch in unserer Arbeit das Haupthilfsmittel sein. Sei $(X, \mathcal{F})$ ein algebrierter Raum. Dann erzeugt jeder Punkt $x \in X$ einen Homomorphismus $\varphi_x: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$, indem man setzt $\varphi_x(f) = f(x)$ für alle Funktionen $f \in \mathcal{F}$. Wir nennen nun den Raum morph-separabel, wenn zwei verschiedene Punkte immer zwei verschiedene Homomorphismen liefern; morph-konvex, wenn jeder Homomorphismus durch wenigstens einen Punkt erzeugt wird und morph-vollständig, wenn die Beziehung zwischen den Punkten und Homomorphismen eineindeutig ist. Was hier zur Definition der morph-vollständigen Räume dient, entspricht

in der Funktionentheorie einem tiefliegenden Satz (vgl. [R1] und [I]).

Wenn es nun etwa bei einem morph-separablen Raum $(X, \mathcal{F})$ Homomorphismen der Strukturalgebra $\mathcal{F}$ gibt, die keinem Punkt entsprechen, kann man versuchen, diese Homomorphismen als neue Punkte zu X hinzuzufügen. Es zeigt sich, daß es zum selben Problem führt, wenn man versucht, alle morphen Funktionen simultan auf einen größeren Raum als X fortzusetzen. Man stößt so auf den Begriff der Morphiehülle (genaue Definition in 7.1). Wir zeigen, daß es zu jedem algebrierten Raum eine Morphiehülle gibt. Sie hängt nur von der Struktur der Algebra der morphen Funktionen ab (Theorem 7.2). Die Morphiehülle ist morph-vollständig, jede morphe Abbildung eines algebrierten Raums in einen andern kann zu einer Abbildung der Morphiehüllen fortgesetzt werden.

Sucht man mit der Morphiehülle den maximalen Träger einer Funktionenalgebra, so kann man umgekehrt auch den minimalen Träger suchen. Man kommt so zum Begriff des Šilovrands (genaue Definition in 8.1). Zu jedem algebrierten Raum gibt es einen Šilovrand. Auch er hängt nur von der Struktur der Algebra der morphen Funktionen ab (Theorem 8.2). Jede morphe Funktion nimmt auf dem Šilovrand das Maximum ihres Betrages an. Es ergibt sich weiter, daß der Silovrand gleich dem Šilovrand der Morphiehülle ist und daß die Morphiehülle des Šilovrands gleich der Morphiehülle des algebrierten Raums selbst ist.

Eine allgemeine Methode, wie man auf einem kompakten Raum in natürlicher Weise eine algebrierte Struktur definieren

kann, wird in § 9 besprochen und in den folgenden Paragraphen angewendet. Auf einem Teilraum eines algebrierten Raums wird als Menge der morphen Funktionen die kleinste Banachalgebra stetiger Funktionen ausgezeichnet, so daß die Einbettung noch eine morphische Abbildung wird. Eine besondere Rolle spielen die lytischen Teilräume (Definition 10.3), die den analytischen Teilräumen in der Funktionentheorie entsprechen. Ein lytischer Teilraum eines morph-vollständigen Raumes ist morph-vollständig.- Die direkte Summe und das Tensorprodukt algebrierter Räume (§11) erhält man, wenn man auf der topologischen Summe bzw. dem topologischen Produkt in natürlicher Weise eine algebrierte Struktur einführt. Es gilt: Die direkte Summe (das Tensorprodukt) algebrierter Räume ist genau dann morph-separabel (-konvex, -vollständig), wenn alle Summanden (Faktoren) es sind.

Einen speziellen algebrierten, sogar morph-vollständigen Raum erhält man, wenn man als Träger die Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene nimmt und als morphische Funktionen diejenigen, die im Innern des Einheitskreises holomorph und am Rand noch stetig sind. Auch die Tensorprodukte dieses Raumes mit sich selbst, die endlich- und unendlichdimensionalen Polyzylinder, sind morph-vollständig, ebenso die lytischen Teilräume der Polyzylinder. Es gilt (Theorem 12.1): Jeder morph-vollständige Raum läßt sich bimorph auf einen lytischen Teilraum eines Polyzylinders abbilden. Dieser Satz ist insofern interessant, als die lytischen Teilmengen endlichdimensionaler Polyzylinder im Innern des Polyzylinders analytische Teilmengen (im Sinn der

Funktionentheorie) sind und die morphen Funktionen auf ihnen holomorphe Funktionen.

Da die morphen Funktionen eines algebrierten Raums eine Algebra bilden, sind Polynome von morphen Funktionen wieder morph. Als Verallgemeinerung hiervon gilt: Die Menge der morphen Funktionen auf einem morph-konvexen Raum ist abgeschlossen gegenüber Anwendung holomorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen (genaue Formulierung in Theorem 16.2). Dieser Satz kann als Grundlage zum Beweis von Approximationssätzen für holomorphe Funktionen dienen, z.B. folgendermaßen: Sei X ein kompakter Teil einer lokal-analytischen Menge des $\mathbb{C}^n$. Es sei bekannt, daß X , versehen mit der Algebra $\mathcal{F}$ derjenigen Funktionen auf X , die man durch irgendwelche anderen Funktionen gleichmäßig approximieren kann, morph-konvex ist und daß die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^n$ in $\mathcal{F}$ enthalten sind. Dann liegen in $\mathcal{F}$ alle holomorphen Funktionen auf X (Corollar 16.3).

In diesem Zusammenhang ist auch folgender Satz wichtig: Sei R ein komplexer Raum und X eine kompakte Teilmenge von R mit der Eigenschaft, daß es zu jedem Punkt $y \notin X$ eine auf R holomorphe Funktion f gibt mit $|f(y)| > \sup_{x \in X} |f(x)|$. Dann ist X , versehen mit der Algebra derjenigen Funktionen auf X , die gleichmäßig durch auf R holomorphe Funktionen approximiert werden können, morph-konvex (Theorem 17.2). Dieser Satz kann auch zu einem verhältnismäßig einfachen Beweis für die Tatsache herangezogen werden, daß jeder stetige Homomorphismus der Algebra der auf einem holomorph-konvexen Raum R holomorphen Funktionen $\mathcal{O}$ auf den Körper $\mathbb{C}$ (die Stetigkeit bezieht sich auf die Topologie der kom-

pakten Konvergenz in $\mathcal{O}$) durch die Zuordnung $f \rightarrow f(x)$ mit einem gewissen Punkt $x \in R$ geliefert wird.

In § 13 zeigt sich, daß die entwickelten Begriffsbildungen auch für die Gewinnung von Approximationssätzen für stetige Funktionen nützlich sind. Übrigens fällt an mehreren Stellen auf, daß die allgemein stetigen Funktionen und die holomorphen Funktionen mit ähnlichen Methoden behandelt werden können.

In den Abschnitten A (Vorbereitungen) und B (Hauptteil) werden, dem axiomatischen Aufbau entsprechend, alle Beweise vollständig gegeben und im wesentlichen nur einige Tatsachen aus der allgemeinen Topologie und der Theorie der topologischen Vektorräume (hierfür siehe [B1] und [B2]) als bekannt vorausgesetzt. Dagegen war es im Abschnitt C (Anwendungen und Beispiele) nicht zu umgehen, aus der Funktionentheorie einige Sätze ohne Beweis heranzuziehen. In § 15 sind sämtliche benutzten Definitionen und Sätze aus der Funktionentheorie mehrerer komplexen Veränderlichen zusammengestellt.

Herrn Professor Dr. K. Stein danke ich für sein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit und für manche wertvolle Anregung.

A. Vorbereitungen

In den ersten drei Paragraphen werden wir das Wichtigste an Definitionen und Sätzen über Banachalgebren zusammenstellen. Eine ausführlichere Darstellung findet sich z.B. in dem Buch von Loomis [L]. Bei uns ergeben sich jedoch einige Vereinfachungen, da wir uns auf kommutative Algebren mit Einselement beschränken.

§ 1. RINGE, ALGEBREN, FUNKTIONENALGEBREN

1 a. Unter Ringen bzw. Algebren verstehen wir immer kommutative Ringe (Algebren) mit Einselement. In eine Algebra über dem Körper K denken wir uns immer den Körper eingebettet. Die Körperelemente nennen wir auch Skalare.

Ist X eine nichtleere Menge und K ein Körper, so bildet die Menge aller Funktionen auf X mit Werten in K eine Algebra über K , wenn man zwei Funktionen punktweise addiert bzw. multipliziert. Die konstanten Funktionen bilden den eingebetteten Körper. Die Menge aller K -wertigen Funktionen kann man auch deuten als die Menge K^X . Der Wert einer Funktion f an der Stelle $x \in X$ stellt sich dann dar als $f(x) = \text{pr}_x(f)$, wobei pr_x die Projektion auf die x -Koordinate von K^X ist.

Sei $\mathcal{F}$ irgendeine Menge von Funktionen auf X mit Werten in K . Wir führen folgende Bezeichnungsweisen ein:

1.1

a) $\mathcal{F}$ ist die kleinste Algebra, welche $\mathcal{F}$ enthält.

$\mathcal{F}$ besteht also aus allen Polynomen der Gestalt

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \alpha_{i_1 \dots i_n} f_1^{i_1} \dots f_n^{i_n}$$

mit $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$, $\alpha_{i_1 \dots i_n} \in K$, wobei $n \geq 1$ und $m_1, \dots, m_n \geq 0$ beliebige ganze Zahlen sind.

b) $\mathcal{F}$ trennt X heißt: Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Es gilt: $\mathcal{F}$ trennt X $\nleftrightarrow$ $[\mathcal{F}]$ trennt X

c) $x \in X$ heißt Nullstelle von $\mathcal{F}$, wenn für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt: $f(x) = 0$.

d) $\mathcal{F}$ heißt inversenabgeschlossen, wenn mit jeder Funktion f ohne Nullstellen auf X auch die Funktion $\frac{1}{f}$ zu $\mathcal{F}$ gehört.

e) Sei Y eine nichtleere Teilmenge von X . Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}|Y$ die Beschränkung der Funktionen von $\mathcal{F}$ auf Y .

f) Sind $f, g \in \mathcal{F}$, so bezeichnet $f \times g$ die Abbildung $x \rightarrow (f(x), g(x))$ von X in K^2 .

Sind $f_i \in \mathcal{F}$ ($i \in I$), so ist $\bigtimes_{i \in I} f_i : X \rightarrow K^I$ die Abbildung $x \rightarrow (f_i(x))_{i \in I}$.

Dagegen ist $\prod_{i=1}^n f_i$ diejenige Funktion auf X , die an der Stelle x den Wert $f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)$ hat.

g) K^I sei gegeben. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{P}$ die Algebra aller Polynome in den Koordinaten von K^I . Ist Y eine Teilmenge von K^I , so bezeichnet $\mathcal{R}_Y$ die Algebra aller rationalen Funktionen mit Polstellen (einschließlich Unbestimmtheitsstellen) außerhalb von Y .

1. b. Wir brauchen nun einige Sätze über Ideale von Ringen.

Definition 1.2 Alle Ideale, außer dem Ring selbst, heißen echte Ideale. Alle Ideale, außer dem Ring selbst und dem Nullideal, heißen nicht-triviale Ideale.---

Definition 1.3 Ein maximales Ideal $\mathfrak{J}$ eines Ringes $\mathcal{R}$ ist ein echtes Ideal derart, daß kein echtes Ideal $\mathfrak{J}_1$ existiert mit $\mathfrak{J} \subsetneq \mathfrak{J}_1 \subsetneq \mathcal{R}$. Dies ist gleichbedeutend damit, daß $\mathcal{R}/\mathfrak{J}$ keine nicht-trivialen Ideale besitzt.---

Satz 1.4 Jedes echte Ideal $\mathfrak{J}$ kann zu einem maximalen Ideal erweitert werden.---

Beweis: Sei $\mathcal{J}$ die Menge aller echten Ideale, die $\mathfrak{J}$ umfassen. $\mathcal{J}$ ist durch die mengentheoretische Enthaltenseinsrelation induktiv geordnet. Denn sei $\mathcal{J}_1 = \{\mathfrak{J}_i, i \in I\}$ eine linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{J}$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{J}_i$ wieder ein echtes Ideal, da es das Einselement des Rings nicht enthält. Also besitzt $\mathcal{J}$ nach dem Zornschen Lemma mindestens ein maximales Element.

Satz 1.5 In einem Ring $\mathcal{R}$ hat ein Element r dann und nur dann ein Inverses, wenn es in keinem maximalen Ideal liegt.---

Beweis: Besitzt r ein Inverses, so enthält jedes Ideal, in dem r liegt, das Einselement. r liegt also in keinem maximalen Ideal.

Besitzt r kein Inverses, so ist das Hauptideal $r\mathcal{R}$ ein echtes Ideal, welches zu einem maximalen Ideal erweitert werden kann.

Daraus folgen unmittelbar

Corollar 1.6 Ein Ring ist dann und nur dann ein Körper, wenn er keine nicht-trivialen Ideale besitzt.---

Corollar 1.7 Ein echtes Ideal $\mathfrak{J}$ eines Ringes $\mathcal{R}$ ist

dann und nur dann maximal, wenn $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ ein Körper ist.---

§ 2. BANACHALGEBREN

2 a.

Definition 2.1 Eine Banachalgebra $\mathcal{B}$ ist eine normierte Algebra über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, welche bezüglich der Norm vollständig ist. Die Norm $\| \cdot \|$ muß folgenden Bedingungen genügen:

- 1) $\| a \| = 0 \iff a = 0$
- 2) $\| a + b \| \leq \| a \| + \| b \|$ für alle $a, b \in \mathcal{B}$
- 3) $\| \lambda a \| = |\lambda| \| a \|$ und $\lambda \in \mathbb{C}$
- 4) $\| 1 \| = 1$
- 5) $\| ab \| \leq \| a \| \| b \|$ ---

Wegen 1) ist $\mathcal{B}$ ein Hausdorff-Raum, durch 2), 3), 5) werden Addition, Subtraktion und Multiplikation stetige Operationen. 3) und 4) sorgen dafür, daß $\mathbb{C}$ isometrisch in die Algebra eingebettet ist. Übrigens bildet $\mathbb{C}$ allein auch eine Banachalgebra.

Da ein abgeschlossener Teilraum eines vollständigen topologischen Raums wieder vollständig ist, ist eine abgeschlossene Unteralgebra wieder eine Banachalgebra. Wegen der Stetigkeit der algebraischen Operationen ist die abgeschlossene Hülle einer Unteralgebra eine abgeschlossene Unteralgebra.

Wir wollen noch bemerken, daß jeder Punkt einer Banachalgebra eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt und man sich daher, statt allgemeine Cauchyfilter zu betrachten, auf Cauchyfolgen beschränken kann.

Der folgende Hilfssatz zeigt, wie schön es sich in einer

Banachalgebra rechnen läßt.

Hilfssatz 2.2 Jedes Element a einer Banachalgebra, das von der Eins einen geringeren Abstand als 1 hat, besitzt ein Inverses.---

Beweis:

$$a^{-1} = [1 - (1-a)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^n$$

Die Summe konvergiert, da $\|1-a\| < 1$ und es ist

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^n\right)a = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^n\right)(1 - (1-a)) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (1-a)^n = 1.$$

Satz 2.3 Sei $\mathcal{B}^x$ die Menge aller Elemente der Banachalgebra, welche ein Inverses besitzen. $\mathcal{B}^x$ ist offen und die Inversenbildung ist auf $\mathcal{B}^x$ stetig.---

Beweis: 1. Besitzt a ein Inverses, so auch alle Elemente der Gestalt $a-d$ mit $\|d\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, denn

$$(a-d)^{-1} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{d}{a}\right)^{-1} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{a}\right)^n$$

$$2. \|a^{-1} - (a-d)^{-1}\| = \left\| \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{a}\right)^n \right\| \leq \left\| \frac{1}{a} \right\| \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{d}{a} \right\|^n \leq \|a^{-1}\|^2 \frac{\|d\|}{1 - \|d\| \|a^{-1}\|}$$

Dies strebt nach null, wenn $\|d\|$ nach null strebt.

In ähnlichem Stil berechnet man folgende Formeln, die wir später brauchen werden.

$$2.4 \quad \|(a-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} \quad \text{für } |\lambda| > \|a\|$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} [(a-\lambda-\xi)^{-1} - (a-\lambda)^{-1}] &= (a-\lambda)^{-2} \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} [(1-(\lambda+\xi)a)^{-1} - (1-\lambda a)^{-1}] &= a(1-\lambda a)^{-2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{falls } (a-\lambda)^{-1} \\ \text{bzw. } (1-\lambda a)^{-1} \\ \text{existieren.} \end{array}$$

2 b. Ideale von Banachalgebren

Aus Satz 2.3 folgt unmittelbar

Satz 2.5 Ist $\mathcal{I}$ ein echtes Ideal, so auch die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathcal{I}}$. Jedes maximale Ideal ist also abgeschlossen.--

Beweis: Da $\mathcal{I}$ echt ist, gilt $\mathcal{I} \subset \mathcal{CB}^*$. Da $\mathcal{CB}^*$ abgeschlossen ist, ist auch $\overline{\mathcal{I}} \subset \mathcal{CB}^*$, also $\overline{\mathcal{I}}$ echt.

Satz 2.6 Ist $\mathcal{I}$ ein echtes abgeschlossenes Ideal einer Banachalgebra $\mathcal{B}$, so wird $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ mit der Norm

$$\|\tilde{a}\| = \inf_{a \in \tilde{a}} \|a\|$$

wieder eine Banachalgebra.---

Beweis: $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ ist natürlich eine Algebra. Wir brauchen also nur die Eigenschaften der Norm und die Vollständigkeit nachzuprüfen. Da $\mathcal{I}$ abgeschlossen, ist auch jede Äquivalenzklasse $\tilde{a} = a + \mathcal{I}$ abgeschlossen.

Zu 1): Sei $\|\tilde{a}\| = 0$, dann gibt es eine Folge $a_n \in \tilde{a}$ mit $\|a_n\| \rightarrow 0$. Daraus folgt $a_n \rightarrow 0$ und, da $\tilde{a}$ abgeschlossen ist, $0 \in \tilde{a}$, d.h. $\tilde{a} = \tilde{0}$. Umgekehrt gilt natürlich $\|\tilde{0}\| = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Zu 2): } \|\tilde{a} + \tilde{b}\| &= \inf_{c \in \tilde{a} + \tilde{b}} \|c\| = \inf_{a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}} \|a + b\| \leq \\ &\leq \inf_{a \in \tilde{a}} \|a\| + \inf_{b \in \tilde{b}} \|b\| = \|\tilde{a}\| + \|\tilde{b}\|. \end{aligned}$$

Ähnlich beweist man 3) und 5).

Zu 4): $\|\tilde{1}\| \leq 1$, da $1 \in \tilde{1}$.

$\|\tilde{1}\| \geq 1$, denn andernfalls gäbe es ein $a \in \mathcal{I}$ mit $\|1-a\| < 1$ und a müßte nach Hilfssatz 2.2 ein Inverses besitzen, was unmöglich ist.

Zur Vollständigkeit: Sei $\tilde{a}_n$ eine Cauchyfolge. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß $\|\tilde{a}_{n-1} - \tilde{a}_n\| < \frac{1}{2^n}$. (Wenn nötig, gehen wir zu einer Teilfolge über. Konvergiert die Teilfolge, so auch die ursprüngliche Folge). Wir wählen ein beliebiges $a_1 \in \tilde{a}_1$, dann bestimmen wir ein $a_2 \in \tilde{a}_2$ mit $\|a_1 - a_2\| < \frac{1}{2^1}$, ..., ein $a_n \in \tilde{a}_n$ mit $\|a_{n-1} - a_n\| < \frac{1}{2^n}$, usw. Die a_n bilden eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}$ und haben dort einen Grenzwert a . Dann ist $\tilde{a}$ Grenzwert der Folge $\tilde{a}_n$ in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$, denn $\|\tilde{a} - \tilde{a}_n\| \leq \|a - a_n\|$.

2 c. Homomorphismen von Banachalgebren

Definition 2.7 Ein Homomorphismus $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zweier Banachalgebren über dem Körper $\mathbb{C}$ ist ein stetiger Ringhomomorphismus, der die Körperelemente festläßt.

Ein Isomorphismus $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$, so daß ϕ und ϕ^{-1} Homomorphismen sind. Die Menge der Homomorphismen der Banachalgebra $\mathcal{A}$ in den Körper $\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.---

Man beachte, daß es nach dieser Definition keinen Nullhomomorphismus gibt, denn die Eins geht immer in die Eins über. Man kann auch hier nicht ähnlich wie auf der Menge der Homomorphismen zweier Vektorräume eine algebraische Struktur einführen, denn bei der üblichen Addition zweier Homomorphismen geht die Multiplikativität, bei der Multiplikation die Linearität verloren.

Satz 2.8 Ein Homomorphismus im algebraischen Sinn

$\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann stetig, wenn die „Norm“ des Homomorphismus

$$\|\phi\| := \sup_{0 \neq a \in \mathcal{A}} \frac{\|\phi(a)\|}{\|a\|}$$

endlich ist. Hat $\mathcal{B}$ die Eigenschaft, daß für alle $b \in \mathcal{B}$ gilt $\|b^2\| = \|b\|^2$ (dies ist z.B. der Fall für $\mathcal{B} = \mathbb{C}$), so ist für die Stetigkeit notwendig und hinreichend, daß $\|\phi\| \leq 1$.---

Beweis: Ist $\|\phi\| = \gamma < \infty$, so gilt

$$\|\phi(a_1) - \phi(a_2)\| = \|\phi(a_1 - a_2)\| \leq \gamma \|a_1 - a_2\|, \text{ also } \phi \text{ stetig.}$$

Ist dagegen $\|\phi\|$ nicht endlich, so gibt es eine Folge $a_n \in \mathcal{A}$

mit $\frac{\|\phi(a_n)\|}{\|a_n\|} \geq n^2$. Eventuell nach Multiplikation mit

einem Skalar ist $\|a_n\| \leq \frac{1}{n}$ und $\|\phi(a_n)\| \geq n$. ϕ ist offensichtlich nicht stetig.

Nun gelte $\|b^2\| = \|b\|^2$ für alle $b \in \mathcal{B}$.

$\|\phi\| \leq 1$ ist nach dem vorher Bewiesenen natürlich hinreichend für die Stetigkeit.

Es ist aber auch notwendig, denn ist $\|\phi\| > 1$, so gibt es ein $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < \|\phi(a)\|$; durch Multiplikation mit einem Skalar kann man sogar erreichen, daß $\|a\| < 1$ und $\|\phi(a)\| > 1$. Daraus folgt $\|a^{2^n}\| \rightarrow 0$, $\|\phi(a^{2^n})\| \rightarrow \infty$. ϕ ist dann also nicht stetig.

2 d.

Satz 2.9 (Gelfand-Mazur) Jede Banachalgebra $\mathcal{B}$ über $\mathbb{C}$ ohne nicht-triviale Ideale ist gleich (isomorph isometrisch) $\mathbb{C}$.---

Beweis: $\mathcal{B}$ ist auf jeden Fall ein Körper (Corollar 1.6).

Annahme: Es gibt ein $a \in \mathcal{B}$, welches nicht zu dem eingebetteten Körper $\mathbb{C}$ gehört. Dann ist $a - \lambda$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ durchläuft, niemals 0, also besitzt $a - \lambda$ stets ein Inverses.

Wir bestimmen nun ein stetiges, lineares Funktional F auf $\mathcal{B}$ mit $F(a^{-1}) = 1$. (Ein solches existiert nach dem Theorem von Hahn-Banach, siehe [B2]). $f(\lambda) := F((a - \lambda)^{-1})$ ist eine stetige komplexwertige Funktion von λ mit $f(0) = 1$. (Man erinnere sich daran, daß die Inversenbildung auf $\mathcal{B}^\times$ stetig ist (Satz 2.5)). $f(\lambda)$ ist außerdem differenzierbar, denn es gilt $f'(\lambda) = \lim_{\xi \rightarrow \lambda} \frac{1}{\xi} [F((a - \xi)^{-1}) - F((a - \lambda)^{-1})] = F((a - \lambda)^{-2})$ (Formel 2.4). Also ist $f(\lambda)$ eine in der ganzen komplexen Ebene holomorphe Funktion. Für $|\lambda| \rightarrow \infty$ gilt $\|(a - \lambda)^{-1}\| \rightarrow 0$ (Formel 2.4), also $|F((a - \lambda)^{-1})| \rightarrow 0$, d.h. $|f(\lambda)| \rightarrow 0$. Daraus folgt $f(\lambda) \equiv 0$, was im Widerspruch zu $f(0)=1$ steht.

Satz 2.10 Gegeben sei eine Banachalgebra $\mathcal{B}$. Dann ist jedes maximale Ideal $\mathfrak{J}$ von $\mathcal{B}$ Kern eines Homomorphismus $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ und umgekehrt.---

Beweis: Da $\mathfrak{J}$ abgeschlossen ist (Satz 2.5), ist $\mathcal{B}/\mathfrak{J}$ eine Banachalgebra (Satz 2.6), sowie ein Körper (Corollar 1.7). Nach dem vorigen Satz ist $\mathcal{B}/\mathfrak{J}$ gleich $\mathbb{C}$. Der Homomorphismus, der jedem Element von $\mathcal{B}$ die Äquivalenzklasse zuordnet, in der es liegt, ist stetig, denn es gilt $\|\tilde{a}\| \leq \|a\|$. Ist umgekehrt φ ein Homomorphismus aus $\mathcal{H}(\mathcal{B})$, so ist $\mathcal{B}/\ker \varphi = \mathbb{C}$, also nach Corollar 1.7 $\ker \varphi$ ein maximales Ideal.

§ 3. GELFANDDARSTELLUNG EINER BANACHALGEBRA

3 a. Sei X ein kompakter Raum (nach der Definition von N.Bourbaki $[B1]$). Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}(X)$ die Algebra aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X . Versehen mit der Norm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ wird $\mathcal{C}(X)$ zu einer Banachalgebra. Die Konvergenz einer Folge von Funktionen bezüglich dieser Norm ist die gleichmäßige Konvergenz auf ganz X . Die Vollständigkeit von $\mathcal{C}(X)$ wird dadurch gewährleistet, daß eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen eine stetige Funktion als Grenzwert hat. Die abgeschlossenen Unteralgebren $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$ sind wieder Banachalgebren. Man bemerkt, daß diese die Eigenschaft $\|f^2\| = \|f\|^2$ für $f \in \mathcal{F}$ haben. Wir werden zeigen, daß eine beliebige Banachalgebra mit dieser Eigenschaft der Norm einer Banachalgebra stetiger Funktionen auf einem kompakten Raum isomorph und isometrisch ist. Dazu müssen wir uns mit der Menge $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ der Homomorphismen einer Banachalgebra $\mathcal{B}$

auf den Körper $\mathbb{C}$ näher beschäftigen.

Wir stellen zunächst fest, daß $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ nicht leer ist.

Denn $\mathcal{B}$ enthält das Nullideal, dieses erweitern wir gemäß Satz 1.4 zu einem maximalen Ideal und dies ist nach Satz 2.10 Kern eines Homomorphismus $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$.

Jetzt führen wir auf $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ eine Topologie ein

Definition 3.1 $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ ist eine Menge von Abbildungen von $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{C}$, kann also als Teilmenge von $\mathbb{C}^{\mathcal{B}}$ aufgefaßt werden. $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ trage die von $\mathbb{C}^{\mathcal{B}}$ induzierte Topologie.---

Eine Subbasis der Umgebungen eines Homomorphismus $\varphi_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ bilden also die Mengen

$$V(\varphi_0, f, \varepsilon) := \{ \varphi : |\varphi(f) - \varphi_0(f)| < \varepsilon \}.$$

f durchläuft $\mathcal{B}$, ε die reellen Zahlen > 0 .

Eine Basis der Umgebungen erhält man, wenn man alle endlichen Durchschnitte davon nimmt.

Grob gesprochen kann man die Topologie so charakterisieren:

$$\varphi_n \rightarrow \varphi_0 \iff \varphi_n(f) \rightarrow \varphi_0(f) \text{ für alle } f \in \mathcal{B}$$

Exakt hat man sich aber statt der Folgen Filter zu denken, denn im allgemeinen hat ein Homomorphismus φ_0 keine abzählbare Umgebungsbasis.

Satz 3.2 $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ ist kompakt.---

Beweis:

Da für alle $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ gilt $\|\varphi\| \leq 1$, ist für alle $b \in \mathcal{B}$ $|\varphi(b)| \leq \|b\|$. Sei S_b die Menge $\{ \lambda : |\lambda| \leq \|b\| \}$ in $\mathbb{C}$.

S_b ist kompakt, also auch $S := \prod_{b \in \mathcal{B}} S_b \subset \mathbb{C}^{\mathcal{B}}$ und es gilt $\mathcal{H}(\mathcal{B}) \subset S$. Wir brauchen also nur noch nachzuweisen, daß $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ abgeschlossen ist.

Sei $\psi \in \overline{\mathcal{H}(\mathcal{B})}$, dann gilt auch $\psi \in \prod_{b \in \mathcal{B}} S_b$, daraus folgt $\|\psi\| \leq 1$.

Seien $a, b \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$V_n := U_n^\lambda \cap U_n^a \cap U_n^b \cap U_n^{a+b} \cap U_n^{ab},$$

$$\text{wobei } U_n^c := \left\{ \varphi : |\varphi(c) - \psi(c)| < \frac{1}{n} \right\},$$

ist eine Umgebung von ψ und schneidet daher $\mathcal{H}(\mathcal{B})$.

Also gibt es einen Homomorphismus $\varphi_n \in V_n \cap \mathcal{H}(\mathcal{B})$.

Wir haben nun in $\mathbb{C}$ die Situation:

$$\lambda = \varphi_n(\lambda) \rightarrow \psi(\lambda) \quad \text{und} \quad \psi(\lambda) = \lambda$$

$$\varphi_n(a) \rightarrow \psi(a) \quad \text{und} \quad \varphi_n(b) \rightarrow \psi(b), \text{ sowie}$$

$$\varphi_n(a+b) \rightarrow \psi(a+b) \quad \text{und} \quad \varphi_n(ab) \rightarrow \psi(ab).$$

Andrerseits gilt

$$\varphi_n(a+b) = \varphi_n(a) + \varphi_n(b) \rightarrow \psi(a) + \psi(b)$$

$$\varphi_n(ab) = \varphi_n(a) \varphi_n(b) \rightarrow \psi(a) \psi(b).$$

$$\text{Also ist } \psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$$

$$\text{und } \psi(ab) = \psi(a) \psi(b),$$

daraus folgt $\psi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$.

q.e.d.

3 b. Wir können jetzt einen Homomorphismus einer Banachalgebra $\mathcal{B}$ in die Algebra $\mathcal{C}(\mathcal{H}(\mathcal{B}))$ der stetigen Funktionen auf dem kompakten Raum $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ konstruieren, die Gelfanddarstellung der Algebra $\mathcal{B}$.

Satz 3.3 Die Zuordnung $b \rightarrow \Gamma^*(b)$, $b \in \mathcal{B}$, wobei $\Gamma^*(b)$ die durch $\Gamma^*(b)(\varphi) = \varphi(b)$, $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$, definierte Funktion auf $\mathcal{H}(\mathcal{B})$ ist, liefert einen Homomorphismus $\Gamma^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}(\mathcal{B}))$.---

Beweis:

1) $\Gamma^*(b)$ ist eine stetige Funktion auf $\mathcal{H}(\mathcal{B})$. Das Urbild einer ε -Umgebung von $\Gamma^*(b)(\varphi_0)$ ist gleich

$$\{\varphi: |\Gamma^*(b)(\varphi) - \Gamma^*(b)(\varphi_0)| < \varepsilon\} = \{\varphi: |\varphi(b) - \varphi_0(b)| < \varepsilon\}.$$

Dies ist eine Umgebung von φ_0 .

2) Γ^* ist ein Homomorphismus im algebraischen Sinn, wir beweisen als Beispiel die Additivität:

$$\Gamma^*(a+b)(\varphi) = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \Gamma^*(a)(\varphi) + \Gamma^*(b)(\varphi) = (\Gamma^*(a) + \Gamma^*(b))(\varphi).$$

3) Γ^* ist stetig, da $\|\Gamma^*(a)\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}} |\varphi(a)| \leq \|a\|$ (Satz 2.8)
q.e.d.

Der folgende Satz dient zur Beantwortung der Frage, wann dieser Homomorphismus Γ^* injektiv bzw. isometrisch ist.

Satz 3.4 Für jedes $b \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{B}} |\varphi(b)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|b^n\|}.$$

Beweis: 1) $\sup_{\varphi} |\varphi(b)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|b^n\|}$,

da für jedes φ gilt $|\varphi(b^n)| \leq \|b^n\|$, d.f. $|\varphi(b)| \leq \sqrt[n]{\|b^n\|}$.

2) $\sup_{\varphi} |\varphi(b)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|b^n\|}$.

$(1-\lambda b)^{-1}$ existiert für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$|\lambda| < \frac{1}{\sup_{\varphi} |\varphi(b)|} =: \beta$$

(Vgl. Satz 1.5 und 2.10). Für ein beliebiges stetiges lineares Funktional F auf $\mathcal{B}$ ist deshalb $F((1-\lambda b)^{-1})$ eine holomorphe Funktion für $|\lambda| < \beta$ (vgl. 2.4) und besitzt dort die konvergente Potenzreihenentwicklung

$$F((1-\lambda b)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F(b^n).$$

Für jedes $\beta_1 < \beta$ ist daher die Folge der Zahlen $\beta_1^n F(b^n) = F(\beta_1^n b^n)$, $n = 1, 2, \dots$, beschränkt. Aus einem allgemeinen Satz über beschränkte Mengen in lokal-konvexen topologischen Vektorräumen⁺) folgt daraus, daß auch die Folge $\| \beta_1^n b^n \|$ beschränkt ist: $\beta_1^n \|b^n\| < \gamma$ für alle n .

Indem man jeweils die n -te Wurzel zieht, folgt die Behauptung.

^{+) Der herangezogene Satz lautet: Sei E ein lokal-konvexer topologischer Vektorraum, A eine Teilmenge von E . Wenn jedes stetige lineare Funktional auf E in A beschränkt ist, dann ist A beschränkt [B2, chap. IV, §2, th. 3].}

Aus dem soeben bewiesenen Satz ergibt sich, daß genau diejenigen Elemente $b \in \mathcal{B}$ bei dem Homomorphismus Γ^* in die Null übergehen, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|b^n\|} = 0$. Weiter gilt:

Satz 3.5 Genau die Banachalgebren $\mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $\|b^2\| = \|b\|^2$ für alle $b \in \mathcal{B}$ haben die Eigenschaft $\|b\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})} |\varphi(b)|$. Genau diese Algebren sind einer Banachalgebra stetiger Funktionen auf einem kompakten Raum isometrisch-isomorph.---

Der Beweis ist trivial. Als Banachalgebra stetiger Funktionen nimmt man natürlich das Bild von $\mathcal{B}$ beim Homomorphismus Γ^* .

Als weitere Folgerung ergibt sich

Satz 3.6 Sei $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus im algebraischen Sinn einer Banachalgebra $\mathcal{A}$ in eine Banachalgebra $\mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $\|b^2\| = \|b\|^2$ für alle $b \in \mathcal{B}$. Dann ist ϕ stetig.---

Beweis: 1) Für den Fall $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ folgt die Behauptung aus Satz 2.10, denn der Kern von ϕ ist ein maximales Ideal und jedes maximale Ideal stammt von einem (stetigen) Homomorphismus aus $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

2) Sei nun $\mathcal{B}$ beliebig. Wir zeigen $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$. Für jedes $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ ist $\varphi \circ \phi \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ nach 1), also $|\varphi \circ \phi(a)| \leq \|a\|$. Nach Satz 3.5 gilt $\|\phi(a)\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B})} |\varphi(\phi(a))|$, d.f. $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$.

Wir werden es später nur noch mit Banachalgebren stetiger Funktionen zu tun haben. Dann ist also jeder Homomorphismus im algebraischen Sinn von selbst stetig.

3 c. Wir geben hier noch ein wichtiges Beispiel für eine Banachalgebra mit der Normeigenschaft $\|b^2\| = \|b\|^2$.

Sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (x, y) und der Norm $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Die Menge aller stetigen, linearen Transformationen T des Hilbertraums in sich bildet eine i. a. nichtkommutative Algebra $\mathcal{B}(H)$. Führt man die Norm

$$\|T\| := \sup_{0 \neq x \in H} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

ein, so ist die Algebra bezüglich dieser Norm vollständig.

Bekanntlich kann man jeder Transformation $T \in \mathcal{B}(H)$ eine durch $(x, Ty) = (T^+x, y)$ definierte hermitesch adjungierte Transformation $T^+ \in \mathcal{B}(H)$ zuordnen (vgl. etwa [L]).

Nun sei $\{A_i, i \in I\}$ eine „normale Familie“ von Transformationen aus $\mathcal{B}(H)$, d. h. es gelte $A_i A_j = A_j A_i$ & $A_i A_j^+ = A_j^+ A_i$ für alle $i, j \in I$. Mit $\mathcal{A}$ bezeichnen wir die kleinste, bzgl. der Norm abgeschlossene Unter algebra von $\mathcal{B}(H)$ die $\{A_i, i \in I\}$ umfaßt. $\mathcal{A}$ ist eine kommutative Banachalgebra und man zeigt leicht, daß jede Transformation $A \in \mathcal{A}$ normal ist, d. h. daß gilt $AA^+ = A^+A$.

Wir werden nun zeigen, daß für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $\|A^2\| = \|A\|^2$.

Für jedes $T \in \mathcal{B}(H)$ ist $\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Tx, Tx) = \sup_{\|x\|=1} (T^+Tx, x) \leq \sup_{\|x\|=1} \|T^+Tx\| = \|T^+T\| \leq \|T^+\| \|T\|$. Daraus folgt zunächst $\|T\| \leq \|T^+\|$. Da $T^{++} = T$, gilt auch $\|T^+\| \leq \|T\|$, also $\|T\| = \|T^+\|$. Sodann folgt $\|T\|^2 = \|T^+T\|$.

Für $A \in \mathcal{A}$ ist nun $\|A\|^4 = \|A^+A\|^2 = \|(A^+A)^+A^+A\| = \|A^{++}A^2\| = \|A^2\|^2$.

q. e. d.

Aus dem Bewiesenen folgt, daß die von einer normalen Familie stetiger linearer Transformationen eines Hilbert-raums erzeugte Banachalgebra einer Banachalgebra stetiger Funktionen auf einem kompakten Raum isomorph ist. Die einer Transformation zugeordnete Funktion entspricht der Diagonalform, auf die man in dem Fall, wo H endliche Dimension hat, eine normale Familie von Matrizen simultan transformieren kann.

B. Theorie der algebrierten Räume

§ 4. GRUNDLEGENDE DEFINITIONEN

4 a. Wir definieren in Analogie zur Theorie der geringten Räume (vgl. [GR1])

Definition 4.1 Ein algebrierter Raum ist ein Paar $X = (X, \mathcal{F})$ wobei X ein kompakter Raum und $\mathcal{F}$ eine abgeschlossene Unter-algebra von $\mathcal{C}(X)$ ist. $\mathcal{F}$ heißt die Strukturalgebra von X . Die Funktionen aus $\mathcal{F}$ heißen morphe Funktionen. X heißt der Träger von X .---

Aus der Definition folgt, daß eine gleichmäßig konvergente Folge morpher Funktionen eine morphe Funktion als Grenzwert besitzt.

Beispiele für algebrierte Räume:

- a) $(X, \mathbb{C})$, wobei X ein beliebiger kompakter Raum ist und $\mathbb{C}$ die Menge der konstanten Funktionen bezeichnet.
- b) $(X, \mathcal{C}(X))$ für irgend einen kompakten Raum X .
- c) $(X, \overline{\mathcal{P}|X})$, wobei X ein kompakter Teil eines $\mathbb{C}^I$ ist und $\overline{\mathcal{P}|X}$ die Algebra aller Funktionen auf X , die man gleichmäßig durch Polynome approximieren kann.

d) $(X, \mathcal{K}(X))$, wobei X ein kompakter Teil eines komplexen Raumes ist und $\mathcal{K}(X)$ die Algebra derjenigen Funktionen auf X , welche durch Funktionen, die in einer Umgebung von X holomorph sind, gleichmäßig approximiert werden können.

4 b. Eine stetige Abbildung $\phi: X \rightarrow Y$ zweier kompakter Räume induziert einen Homomorphismus ${}^t\phi: \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$. ${}^t\phi$, die zu ϕ transponierte Abbildung, ist so definiert: ${}^t\phi(g) = g \cdot \phi$. Dies ist ein Homomorphismus im algebraischen Sinn und nach Satz 3.6 auch stetig.

Definition 4.2 Eine morphische Abbildung des algebraisierten Raums $X = (X, \mathcal{F})$ in den algebraisierten Raum $Y = (Y, \mathcal{G})$ ist ein Paar $\Phi = (\phi, {}^t\phi)$, wobei ϕ eine stetige Abbildung von X in Y , und die transponierte Abbildung ${}^t\phi$ ein Homomorphismus von $\mathcal{G}$ in $\mathcal{F}$ ist. Die Abbildung Φ heißt bimorph, wenn ϕ bijektiv und topologisch und ${}^t\phi$ ein Isomorphismus ist.---

Wir veranschaulichen uns eine morphische Abbildung durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{{}^t\phi} & \mathcal{G} \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

wofür wir auch abkürzend $\Phi: X \rightarrow Y$ schreiben.

Wir machen bei der Schreibweise ${}^t\phi$ aus Bequemlichkeit keinen Unterschied, ob es sich um die Abbildung

${}^t\phi: \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ oder um die Abbildung ${}^t\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ handelt. Was gemeint ist, geht immer aus dem Zusammenhang hervor.

Hilfssatz 4.3 Gegeben seien zwei algebraisierte Räume $(X, \mathcal{F})$ und $(Y, \mathcal{G})$ und eine stetige Abbildung $\phi: X \rightarrow Y$.

Dann ist dafür, daß $(\phi, {}^t\phi)$ eine morphhe Abbildung ist, notwendig und hinreichend, daß ${}^t\phi(g) \subset \mathcal{F}$. Ist g' ein Erzeugendensystem von $\mathcal{G}$, d.h. $\mathcal{G} = [\overline{g'}]$, so genügt es schon, daß ${}^t\phi(g') \subset \mathcal{F}$. ---

Der Beweis ist trivial. Man beachte, daß ${}^t\phi(\overline{g'}) \subset \overline{{}^t\phi(g')}$.

Ebenso klar ist der folgende

Satz 4.4 Sind $X = (X, \mathcal{F})$, $Y = (Y, \mathcal{G})$ und $Z = (Z, \mathcal{H})$ algebraisierte Räume und $\phi: X \rightarrow Y$ und $\psi: Y \rightarrow Z$ morphhe Abbildungen, so ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$\psi \circ \phi: X \rightarrow Z$ eine morphhe Abbildung. ---

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{{}^t\phi} & \mathcal{G} & \xleftarrow{{}^t\psi} & \mathcal{H} \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array}$$

Natürlich ist $\psi \circ \phi = (\psi \circ \phi, {}^t(\psi \circ \phi)) = (\psi \circ \phi, {}^t\psi \circ {}^t\phi)$.

Hilfssatz 4.5 Gegeben sei eine morphhe Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{{}^t\phi} & \mathcal{G} \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

Dann gilt

- a) ϕ surjektiv $\searrow$ ${}^t\phi$ injektiv
 b) $\mathcal{F}$ trennt X $\searrow$ ϕ injektiv
 ${}^t\phi$ surjektiv $\searrow$ ---

Beweis: a) Annahme: ${}^t\phi(g_1) = {}^t\phi(g_2)$, d.f. $g_1 \circ \phi = g_2 \circ \phi$, d.f. $g_1(\phi(x)) = g_2(\phi(x))$ für alle $x \in X$. Daraus folgt, da ϕ surjektiv, $g_1(y) = g_2(y)$ für alle $y \in Y$, d.h. $g_1 = g_2$.

b) Annahme: $\phi(x) = \phi(y)$ und $x \neq y$. Es gibt ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$, und, da ${}^t\phi$ surjektiv, ein $g \in \mathcal{G}$ mit $f = g \circ \phi$. Dann ist $f(x) = g(\phi(x))$ und $f(y) = g(\phi(y))$, daraus folgt $f(x) = f(y)$. Widerspruch!

4 c. Sei $(X, \mathcal{F})$ ein algebrierter Raum. Dann ist bei festem $x \in X$ die Zuordnung $f \rightarrow f(x)$ ein Homomorphismus $\varphi_x \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$

Definition 4.6 Wir bezeichnen mit $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F})$ die „kanonische“ Abbildung, die jedem Punkt $x \in X$ den Homomorphismus $\Gamma(x) = \varphi_x \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$ zuordnet, wobei $\varphi_x(f) = f(x)$.---

Definition 4.7 Ein morph $\left\{ \begin{array}{l} \text{separabler} \\ \text{konvexer} \\ \text{vollständiger} \end{array} \right\}$ Raum ist ein algebrierter Raum $(X, \mathcal{F})$, bei dem die kanonische Abbildung $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}) \left\{ \begin{array}{l} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\}$ ist.---

Ein algebrierter Raum ist also genau dann morph-vollständig, wenn er morph-separabel und -konvex ist.

Satz 4.8 Die Abbildung $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F})$ ist stetig und abgeschlossen (d.h. die Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen). Ist $(X, \mathcal{F})$ morph-vollständig, so ist Γ eine topologische Abbildung.---

Beweis: Sei $\Gamma(x_0) = \varphi_{x_0}$ und $V = \{ \varphi : |\varphi(f) - \varphi_{x_0}(f)| < \varepsilon \}$ eine Umgebung aus der Umgebungssubbasis von φ_{x_0} . Dann ist $\Gamma^{-1}(V) = \{ x : |\varphi_x(f) - \varphi_{x_0}(f)| < \varepsilon \} = \{ x : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \}$. Dies ist eine Umgebung von x_0 , weil f eine stetige Funktion ist. Also ist Γ stetig. Γ ist als stetige Abbildung eines kompakten in einen Hausdorffschen Raum auch abgeschlossen (da die Bilder kompakter Mengen kompakt sind) und im Falle der Bijektivität topologisch.

Satz 4.9 Gegeben sei eine morph Abbildung zweier algebrierter Räume

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{\phi} & \mathcal{G} \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

Dann induziert $\tau\phi$ eine stetige Abbildung $\alpha\phi$ von $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ in $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha\phi} & \mathcal{H}(\mathcal{G}) \\ \uparrow \Gamma & & \uparrow \Gamma' \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

ist kommutativ. Ist $\tau\phi$ ein Isomorphismus, so ist $\alpha\phi$ bijektiv und topologisch.---

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$ ist $\alpha\phi(\varphi) = \varphi \circ \tau\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$, da $\tau\phi$ und φ Homomorphismen sind.

Stetigkeit von $\alpha\phi$: Sei $\alpha\phi(\varphi_0) = \psi_0$. Wir bestimmen das Urbild einer Umgebung aus der Umgebungssubbasis des Homomorphismus $\psi_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$

$$V(\psi_0, g, \varepsilon) = \{ \psi : |\psi(g) - \psi_0(g)| < \varepsilon \}$$

$$\alpha\phi^{-1}(V) = \{ \varphi : |\alpha\phi(\varphi)(g) - \alpha\phi(\varphi_0)(g)| < \varepsilon \} = \{ \varphi : |\varphi(\tau\phi(g)) - \varphi_0(\tau\phi(g))| < \varepsilon \}$$

Dies ist eine Umgebung von φ_0 .

Kommutativität: Sei $\Gamma(x) = \varphi_x$ und $\Gamma'(y) = \psi_y$.

$$\alpha\phi(\varphi_x)(g) = \varphi_x(\tau\phi \circ g) = (\tau\phi \circ g)(x) = g(\phi(x)).$$

Also $\alpha\phi(\varphi_x) = \psi_{\phi(x)}$, d.h. $\alpha\phi \circ \Gamma = \Gamma' \circ \phi$.

Ist $\tau\phi$ ein Isomorphismus, so ist $\alpha\phi$ trivialerweise bijektiv und auch topologisch, da $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ kompakt ist. q.e.d.

Aus dem Satz folgt unter anderem, daß die Eigenschaft eines algebraisierten Raumes, morph-separabel, -konvex bzw. -vollständig zu sein, invariant gegenüber bimorphen Abbildungen ist.

§ 5. MORPH-SEPARABLE RÄUME

5 a. Der folgende Satz dient der Rechtfertigung des Namens „morph-separabler“ Raum.

Satz 5.1 $(X, \mathcal{F})$ ist genau dann morph-separabel, wenn $\mathcal{F}$ X trennt.---

Beweis: $\varphi_x = \varphi_y$ gilt genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

In morph-separablen Räumen ist die Lagrangesche Interpolation möglich:

Satz 5.2 Ist $(X, \mathcal{F})$ ein morph-separabler Raum und sind $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Punkte aus X und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ komplexe Zahlen, so gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x_\nu) = \alpha_\nu$.---

Beweis: Zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{F}$ mit $h(x) \neq h(y)$. Die Funktion

$$g_{xy} = \frac{h - h(y)}{h(x) - h(y)} \in \mathcal{F}$$

hat die Eigenschaft $g_{xy}(x) = 1$ und $g_{xy}(y) = 0$. Wir

bilden die Funktionen $l_\nu = \prod_{\mu \neq \nu} g_{x_\nu x_\mu}$, $\nu = 1, \dots, n$, für die gilt $l_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu\mu}$. Die morphische Funktion $f = \sum_\nu \alpha_\nu l_\nu$ leistet das Verlangte.

Bemerkung: Der Satz gilt natürlich auch, wenn X irgendeine Punktmenge und $\mathcal{F}$ eine punktgetrennende Algebra von Funktionen auf X ist.

5 b. Jetzt folgt ein wichtiger Hilfssatz, den wir auch in den folgenden Paragraphen oft anwenden werden.

Hilfssatz 5.3 Sei $(X, \mathcal{F})$ ein algebraisierter Raum, $\mathcal{E}$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}$.

Man bilde die Abbildung $\phi = \bigcap_{f \in \mathcal{E}} f$ von X auf $\phi(X) =: Y \subset \mathbb{C}^{\mathcal{E}}$.

$\mathcal{P}$ sei die Menge aller Polynome in $\mathbb{C}^E$, $\mathcal{R}_Y$ die Menge der rationalen Funktionen mit Polstellen außerhalb von Y .

$(Y, \overline{\mathcal{P}|Y})$ und $(Y, \overline{\mathcal{R}_Y|Y})$ sind dann morph-separable Räume.

$$\mathcal{F} \xleftarrow{\quad \phi \quad} \overline{\mathcal{P}|Y}$$

$$X \xrightarrow{\quad \phi \quad} Y \quad \text{ist eine morphie Abbildung.}$$

Ist $\mathcal{F}$ inversenabgeschlossen, so ist auch

$$\mathcal{F} \xleftarrow{\quad \phi \quad} \overline{\mathcal{R}_Y|Y}$$

$$X \xrightarrow{\quad \phi \quad} Y \quad \text{eine morphie Abbildung.}$$

In beiden Fällen gilt:

Separiert $\mathcal{E}$ X , so ist ϕ eine topologische Abbildung.

Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F} = [\mathcal{E}]$,

so ist ϕ ein Isomorphismus.---

Der Beweis ist, wenn man die Hilfssätze 4.3 und 4.5 beachtet, trivial.

Corollar 5.4 Jeder morph-separable Raum $(X, \mathcal{F})$ ist bi-morph abbildbar auf einen Raum der Gestalt $(Y, \overline{\mathcal{P}|Y})$, wobei Y ein kompakter Teilraum eines $\mathbb{C}^I$ ist (I geeignete Indexmenge).---

Man nehme etwa $\mathcal{F}$ als $\mathcal{E}$. Dann ist $Y = (\bigcap_{f \in \mathcal{F}} f)(X) \subset \mathbb{C}^{\mathcal{F}}$

Hieraus ergibt sich, wenn man die Topologie von $\mathbb{C}^{\mathcal{F}}$ betrachtet,

Satz 5.5 Die Topologie eines morph-separablen Raums $(X, \mathcal{F})$ (exakt ausgedrückt: die seines Trägers) wird von der Strukturalgebra induziert, d.h. die Mengen

$$V(x_0, f, \varepsilon) = \{x : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}, \quad f \in \mathcal{F}, \quad \varepsilon > 0$$

bilden eine Subbasis der offenen Umgebungen eines Punktes $x_0 \in X$.---

5 c. Zugeordneter morph-separabler Raum

Satz 5.6

a) Jedem algebraisierten Raum $(X, \mathcal{F})$ kann man einen bis auf bismorphe Äquivalenz eindeutig bestimmten morph-separablen Raum $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$ zuordnen, der folgendermaßen charakterisiert ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{\tau\Omega} & \tilde{\mathcal{F}} \\ X & \xrightarrow{\Omega} & \tilde{X} \end{array}$$

so daß Ω surjektiv und $\tau\Omega$ ein Isomorphismus ist.

b) Ist ϕ eine Abbildung von $(X, \mathcal{F})$ in einen morph-separablen Raum $(Y, \mathcal{G})$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\tilde{\phi}$ des X zugeordneten morph-separablen Raums $\tilde{X}$ in $\mathcal{Y}$, so daß $\phi = \tilde{\phi} \cdot \Omega$.---

Beweis: a) Um die Existenz eines morph-separablen Raums $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$ mit den verlangten Eigenschaften nachzuweisen, wende man Hilfssatz 5.2 mit $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ an. Die Eindeutigkeit beweisen wir nach Punkt b).

b)

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F} & & \\ & & \swarrow \tau\phi & & \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G} \\ \downarrow \Omega & & \searrow \tilde{\phi} & & \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathcal{Y} & & \\ \uparrow \tau\Omega & & \nwarrow \tau\tilde{\phi} & & \\ \tilde{\mathcal{F}} & & \mathcal{F} & & \end{array}$$

Es ist notwendig $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x)$, wenn $\Omega(x) = \tilde{x}$. Diese Definition von $\tilde{\phi}$ ist unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten x , denn ist $\tilde{x} = \Omega(x) = \Omega(x')$, so gilt $f(x) = f(x')$ für alle $f \in \mathcal{F}$, d.h. $\tau\phi(g)(x) = \tau\tilde{\phi}(g)(x')$, d.h. $g(\phi(x)) = g(\phi(x'))$ für alle $g \in \mathcal{G}$, d.h. $\phi(x) = \phi(x')$, da $(Y, \mathcal{G})$ morph-separabel.

Das so erklärte $\tilde{\varphi}$ ist stetig, denn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ ist abgeschlossen:

$$\tilde{\varphi}^{-1}(A) = \Omega(\varphi^{-1}(A)) \quad (\text{dies gilt, da } \Omega \text{ surjektiv})$$

$\varphi^{-1}(A)$ ist abgeschlossen, da φ stetig, $\Omega(\varphi^{-1}(A))$ ist es, da Ω eine abgeschlossenen Abbildung ist.

${}^t\tilde{\varphi}(\mathcal{G}) \subset \tilde{\mathcal{F}}$, da ${}^t\varphi(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$ und Ω bijektiv ist.

Nun zum Beweis der Eindeutigkeit für a):

Sei $(Y, \mathcal{G})$ ein zweiter $\times$ zugeordneter morph-separabler Raum. Dann ist φ surjektiv und ${}^t\varphi$ ein Isomorphismus, also auch $\tilde{\varphi}$ surjektiv und ${}^t\tilde{\varphi}$ ein Isomorphismus. Nach Hilfssatz 4.5 b) ist $\tilde{\varphi}$ auch injektiv, also $(\tilde{\varphi}, {}^t\tilde{\varphi})$ eine bimorphe Abbildung. q.e.d.

Bemerkung: Den Raum $\tilde{X}$ kann man auch erhalten, indem man die Punkte von X , die durch $\mathcal{F}$ nicht voneinander getrennt werden, identifiziert und die Quotiententopologie einführt (vgl. [B1]).

§ 6. MORPH-KONVEXE RÄUME

6 a.

Wir untersuchen zunächst den Zusammenhang unseres Konvexitätsbegriffs mit dem in der Funktionentheorie gebräuchlichen (siehe [S]).

Definition 6.1 Die polynomkonvexe Hülle einer kompakten Menge $X \subset \mathbb{C}^I$ ist die Menge

$$\mathcal{K}_p(X) := \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \left\{ y \in \mathbb{C}^I : |p(y)| \leq \sup_{x \in X} |p(x)| \right\}.$$

X heißt polynomkonvex, wenn $X = \mathcal{K}_p(X)$.---

Ein Punkt x_1 gehört also genau dann nicht zur polynomkonvexen Hülle von X , wenn ein Polynom p_1 existiert mit

$$|p_1(x_1)| > \sup_{x \in X} |p_1(x)|.$$

Wir werden allgemein, wenn $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionen auf Y und X eine Teilmenge von Y ist, die Bezeichnung

$$h_{\mathcal{F}}(X) := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{y \in Y : |f(y)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|\}$$

einführen.

Satz 6.2 Sei X eine kompakte Teilmenge eines $\mathbb{C}^I$. Wir betrachten den algebraisierten Raum $(X, \overline{\mathcal{P}X})$. Es gilt:

Die Menge der Homomorphismen $\mathcal{H}(\overline{\mathcal{P}X})$ kann in natürlicher Weise bijektiv und topologisch auf die polynomkonvexe Hülle $h_{\mathcal{P}}(X)$ abgebildet werden. Ist also $X = h_{\mathcal{P}}(X)$, so ist $(X, \overline{\mathcal{P}X})$ morph-vollständig.---

Eine äquivalente Aussage wurde erstmals von Šilov [Ši] bewiesen.

Beweis: Sei x ein beliebiger Punkt von $h_{\mathcal{P}}(X)$. Der zugehörige Homomorphismus φ_x wird so erklärt: Jede morphie Funktion f ist auf X uniformer Limes einer Folge von Polynomen p_n . Mit Hilfe dieser Polynome setzt man f fort zu einer Funktion $f_{\mathcal{A}}$, die auf ganz $h_{\mathcal{P}}(X)$ definiert ist: $f_{\mathcal{A}}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$. Der letztere Limes existiert und ist unabhängig von der Auswahl der Folge der Polynome, die gegen f strebt, da $|p(x) - q(x)| \leq \|(p - q)|X\|$ für beliebige Polynome p und q . Jetzt setzt man $\varphi_x(f) = f_{\mathcal{A}}(x)$. φ_x ist offensichtlich linear und multiplikativ. Da die Polynome $h_{\mathcal{P}}(X)$ trennen, entsprechen verschiedenen Punkten verschiedene Homomorphismen.

Nun ist umgekehrt zu zeigen, daß jedem Homomorphismus auch ein Punkt von $h_{\mathcal{P}}(X)$ entspricht.

Sei $\varphi \in \mathcal{H}(\overline{\mathcal{P}X})$, $\{x_i, i \in I\}$ seien die Koordinatenfunktionen in $\mathbb{C}^I$, $\varphi(x_i) = \xi_i$. Der Punkt $x = (\xi_i)_{i \in I}$ liegt

in $\mathcal{H}_p(X)$, denn es gilt wegen der Stetigkeit, Linearität und Multiplikativität von φ

$$\| (p|X) \| \geq |\varphi(p)| = |p((\varphi(x_i)))| = |p((\xi_i))| = |p(x)|$$

für jedes Polynom p . Deshalb ist $\varphi = \varphi_x$

Die Zuordnung $\varphi_x \rightarrow x$ ist stetig:

Sei $x^{(0)} = (\xi_i^{(0)})_{i \in I}$, $\varphi_{x^{(0)}} = \varphi_0$. Wir zeigen, daß das reziproke Bild einer Umgebung von $x^{(0)}$ eine Umgebung von φ_0 ist.

In der Tat: Eine Umgebung aus der Umgebungssubbasis von $x^{(0)}$

hat die Form $\{x : |\xi_i - \xi_i^{(0)}| < \varepsilon\}$. Das reziproke Bild davon

ist die Menge der Homomorphismen $\{\varphi : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon\}$

und dies ist eine Umgebung von φ_0 . Also ist die Zuord-

nung $\varphi_x \rightarrow x$ stetig und nach einem schon oft angewandten

Schluß auch topologisch.

q.e.d.

Satz 6.3 Ein algebrierter Raum $(X, [\overline{\mathcal{E}}])$ ist genau dann morph-konvex, wenn die Menge $(\bigtimes_{f \in \mathcal{E}} f)(X) < \mathbb{C}^{\mathcal{E}}$ polynomkonvex ist. ---

Beweis:

$$\phi := \bigtimes_{f \in \mathcal{E}} f \quad \phi(X) =: Y$$

$$\mathcal{F} := [\overline{\mathcal{E}}] \quad \mathcal{G} := \overline{\mathcal{D}|Y}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\tau\phi} & \mathcal{G}(\mathcal{G}) \\ \uparrow \Gamma & \mathcal{F} \xleftarrow{\tau\phi} \mathcal{G} & \uparrow \Gamma' \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

ϕ ist surjektiv. $\tau\phi$, also auch $\tau\phi$ sind bijektiv.

Deshalb ist Γ genau dann surjektiv, wenn Γ' es ist. q.e.d.

$(Y, \mathcal{G})$ kann als der $(X, \mathcal{F})$ zugeordnete morph-separable

Raum aufgefaßt werden (siehe Satz 5.6). Es ergibt sich also:

Corollar 6.4 Ein algebrierter Raum ist genau dann morph-konvex, wenn der zugeordnete morph-separable Raum morph-vollständig ist. —

6 b. Nun beweisen wir ein wichtiges Kriterium dafür, daß ein algebraierter Raum morph-konvex ist.

Satz 6.5 Sei $(X, \mathcal{F})$ ein algebraierter Raum. Dann gilt:

$(X, \mathcal{F})$ morph-konvex  Jedes Ideal von $\mathcal{F}$ ohne Nullstellen auf X ist ganz $\mathcal{F}$.

Beweis:

" $>$ ": Sei $\mathcal{I}$ ein Ideal von $\mathcal{F}$ ohne Nullstellen auf X .

Annahme: $\mathcal{I}$ echt. Dann läßt sich $\mathcal{I}$ zu einem maximalen Ideal $\mathcal{I}_0$, das erst recht keine Nullstellen hat, erweitern. Dieses maximale Ideal ist nach Satz 2.10 Kern eines Homomorphismus $\varphi_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$. Da $(X, \mathcal{F})$ morph-konvex, gibt es einen Punkt $x_0 \in X$, sodaß $\varphi_0 = \varphi_{x_0}$. Der Kern von φ_{x_0} besteht aber aus allen Funktionen, die in x_0 verschwinden. Widerspruch!

" $<$ ": Sei $\varphi_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$. Wir zeigen, daß es einen Punkt x_0 aus X gibt, so daß $\varphi_0 = \varphi_{x_0}$. Der Kern von φ_0 ist ein maximales Ideal $\mathcal{I}_0 \neq \mathcal{F}$, hat also Nullstellen. Wir wählen eine davon als x_0 . Die Gesamtheit der morphen Funktionen, die in x_0 verschwinden, bildet ein echtes Ideal, dieses muß gleich $\mathcal{I}_0$ sein. Ist $f \in \mathcal{F}$ und $f(x_0) = p$, so ist $f - p \in \mathcal{I}_0$, also $\varphi_0(f-p) = 0$, d.h. $\varphi_0(f) = f(x_0)$. Daraus folgt $\varphi_0 = \varphi_{x_0}$. q.e.d.

Der Satz erinnert an folgenden Satz der Funktionentheorie (vgl. [C1] und [C2]):

Sei G ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{C}^n$. G ist dann und nur dann ein Holomorphiegebiet, wenn zu je k in G holomorphen Funktionen $f_1, \dots, f_k$ ohne gemeinsame Nullstellen in G holomorphe Funktionen $g_1, \dots, g_k$ existieren mit $\sum_{k=1}^k g_k f_k = 1$.

Aus Satz 6.5 ergeben sich als Folgerungen (vgl. [L]):

Corollar 6.6 Die Strukturalgebra eines morph-konvexen Raums $(X, \mathcal{F})$ ist inversenabgeschlossen.---

Beweis: Ist f eine morph Funktion ohne Nullstellen, dann hat das Hauptideal $f\mathcal{F}$ auch keine Nullstellen und ist deshalb gleich $\mathcal{F}$. Daher gibt es ein $g \in \mathcal{F}$ mit $fg = 1$, d.h. $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}$.

Corollar 6.7 $(X, \mathcal{C}(X))$ ist morph-vollständig.---

Beweis: Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{C}(X)$ ein Ideal ohne Nullstellen. Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es deshalb eine Funktion $f_x \in \mathcal{J}$ mit $f_x(x) \neq 0$. Es gilt sogar $f_x(y) \neq 0$ für $y \in U(x)$, wobei $U(x)$ eine hinreichend kleine Umgebung von x ist. Endlich viele dieser Umgebungen, $U(x_1), \dots, U(x_n)$, genügen, um X zu überdecken. Wir setzen $f_i := f_{x_i}$, $h := \sum_{i=1}^n f_i^* f_i$ (f_i^* ist die zu f_i konjugiert-komplexe Funktion). Es ist $h(x) > 0$ für alle $x \in X$, deshalb $\frac{f_i^*}{h} \in \mathcal{C}(X)$ und $\sum_{i=1}^n \frac{f_i^*}{h} f_i = 1 \in \mathcal{J}$, also $\mathcal{J} = \mathcal{C}(X)$. Daher ist $(X, \mathcal{C}(X))$ morph-konvex. Es ist auch morph-separabel, da $\mathcal{C}(X)$ bekanntlich X trennt.

§ 7. DIE MORPHIEHÜLLE EINES ALGEBRIERTEN RAUMS

7 a. Wir definieren nach dem Vorbild von H.Kerner [K1]:

Definition 7.1 Der morph-separable Raum $\mathcal{A}(X) = (\mathcal{A}(X), \mathcal{F}_X)$ heißt Morphiehülle des algebraierten Raums $X = (X, \mathcal{F})$, wenn gilt:

a) Es gibt eine morph Abbildung $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{A}(X)$, so daß

$\Gamma^* : \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist.

b) Zu jedem morph-separablen Raum $Y = (Y, \mathcal{G})$, zu dem es

eine morphie Abbildung $\Phi: X \rightarrow Y$ gibt, so daß
 ${}^t\Phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist, existiert eine
 morphie Abbildung $\Psi: Y \rightarrow \mathcal{A}(X)$ mit $\Gamma = \Psi \cdot \Phi$.---

Bemerkung: Für den Träger der Morphiehülle sollte man
 strenggenommen $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}(X)$ schreiben, da er von der Struktur-
 algebra abhängt. Wir werden jedoch, solange keine Ver-
 wechslungen zu befürchten sind, immer nur $\mathcal{A}(X)$ schreiben.

Theorem 7.2

- 1) Zu jedem algebraisierten Raum gibt es eine Morphiehülle,
 die bis auf bimorphe Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.
- 2) Räume mit isomorphen Strukturalgebren besitzen bimorph
 äquivalente Morphiehüllen.---

Beweis:

- 1) Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit im Falle der
 Existenz.

Seien $\mathcal{A}_i(X)$ ($i=1,2$) zwei Morphiehüllen von X und
 $\Gamma_i: X \rightarrow \mathcal{A}_i(X)$ die zugehörigen Abbildungen. Dann gibt
 es nach der Definitionseigenschaft der Morphiehülle eine
 Abbildung $\Psi_1: \mathcal{A}_2(X) \rightarrow \mathcal{A}_1(X)$ mit $\Gamma_1 = \Psi_1 \cdot \Gamma_2$ und
 eine Abbildung $\Psi_2: \mathcal{A}_1(X) \rightarrow \mathcal{A}_2(X)$ mit $\Gamma_2 = \Psi_2 \cdot \Gamma_1$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \Gamma_1 & \rightarrow \mathcal{A}_1(X) \\
 X & \swarrow & \uparrow \Psi_1 \quad \downarrow \Psi_2 \\
 & \Gamma_2 & \rightarrow \mathcal{A}_2(X)
 \end{array}$$

Wir zeigen, daß die Ψ_i bimorphe Abbildungen sind.

Es gilt ${}^t\Gamma_1 = {}^t\Gamma_2 \cdot {}^t\Psi_1$ und ${}^t\Gamma_2 = {}^t\Gamma_1 \cdot {}^t\Psi_2$, also

${}^t\Gamma_1 = {}^t\Gamma_1 \cdot {}^t\Psi_2 \cdot {}^t\Psi_1$. Da ${}^t\Gamma_1$ ein Isomorphismus ist, ist

${}^t\Psi_2 \cdot {}^t\Psi_1$ die Identität auf $\mathcal{F}_1$. Daraus folgt, daß $\Psi_1 \cdot \Psi_2$

die Identität auf $\mathcal{A}_1(X)$ ist. Denn wäre $\psi_1 \circ \psi_2(x) = y \neq x$, so würde für jedes $f \in \mathcal{F}_1$ gelten $f(x) = (\psi_2 \circ \psi_1(f))(x) = f(\psi_1 \circ \psi_2(x)) = f(y)$, was nicht möglich ist, da $\mathcal{A}_1(X)$ morph-separabel ist. Entsprechendes gilt für $\psi_1 \circ \psi_2$ und $\psi_2 \circ \psi_1$. Deshalb sind die ψ_i bijektiv, ψ_i Isomorphismen und ψ_i bimorphe Abbildungen.

Jetzt konstruieren wir die Morphiehülle.

Wir setzen $\mathcal{A}(X) = \mathcal{G}(\mathcal{F})$ und $\mathcal{F}_\mathcal{A} = \Gamma^*(\mathcal{F})$, wobei Γ^* die in Satz 3.3 definierte Abbildung ist. Als Γ nehmen wir die in 4.6 definierte kanonische Abbildung. Γ^* ist ein Isomorphismus, also auch seine Umkehrung, nämlich ${}^t\Gamma$.

Damit ist die Eigenschaft a) der Morphiehülle erfüllt.

Um die Eigenschaft b) nachzuweisen, wenden wir uns zunächst der Behauptung 2) zu.

2) Seien $(X, \mathcal{F})$ und $(Y, \mathcal{G})$ die zwei algebraisierten Räume und $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ der Isomorphismus ihrer Strukturalgebren.

Wir haben eine bimorphe Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\mathcal{A} & \xleftarrow{{}^t\Lambda} & \mathcal{F}_\mathcal{A} \\ \mathcal{G}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{G}(\mathcal{F}) \end{array}$$

zu konstruieren.

Wir setzen $\Lambda = {}^t\Delta$, d.h. $\Lambda(\psi) = \psi \circ \Delta$ für $\psi \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$.

α) Die Abbildung Λ ist bijektiv und topologisch. Dies beweist man wie in Satz 4.9.

β) Es gilt ${}^t\Lambda(\mathcal{F}_\mathcal{A}) = \mathcal{G}_\mathcal{A}$, denn aus $\Delta(f) = g$ folgt ${}^t\Lambda(f_\mathcal{A}) = g_\mathcal{A}$, ($f_\mathcal{A} = \Gamma^*(f)$), weil für alle $\psi \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$ gilt:

$${}^t\Lambda(f_\mathcal{A})(\psi) = f_\mathcal{A}(\Lambda(\psi)) = (\Lambda(\psi))(f) = \psi(\Delta(f)) = \psi(g) = g_\mathcal{A}(\psi).$$

γ) ${}^t\Lambda$ ist injektiv nach Hilfssatz 4.5 a).

Aus α), β), γ) folgt, daß $(\Lambda, {}^t\Lambda)$ eine bimorphe Abbildung ist.

1) Nun zum Beweis der Eigenschaft b):

Wir haben die Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & \xleftarrow{\tau\Gamma} & \mathcal{F}_h \\
 \uparrow \tau\phi & \begin{array}{c} \times \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{G}(\mathcal{F}) \\ \downarrow \phi \\ \mathcal{Y} \end{array} & \\
 \mathcal{G} & &
 \end{array}$$

$\tau\phi$ ist ein Isomorphismus. Zu konstruieren ist eine morphische Abbildung $\psi: (\mathcal{Y}, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{G}(\mathcal{F}), \mathcal{F}_h)$. Dazu bilden wir $(\mathcal{G}(\mathcal{G}), \mathcal{G}_h)$ und wenden das Ergebnis aus 2) an.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} & \xleftarrow{\tau\Gamma} & & \mathcal{F}_h & \\
 \uparrow \tau\phi & \begin{array}{c} \times \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{G}(\mathcal{F}) \\ \downarrow \phi \\ \mathcal{Y} \end{array} & & \begin{array}{c} \mathcal{G}(\mathcal{F}) \\ \uparrow \Lambda \\ \mathcal{G}(\mathcal{G}) \end{array} & \downarrow \tau\Lambda \\
 \mathcal{G} & \xleftarrow{\tau\Gamma'} & & \mathcal{G}_h &
 \end{array}$$

Wir setzen $\psi = \Lambda \circ \Gamma'$. Aus Satz 4.9 folgt $\Lambda^{-1} \cdot \Gamma = \Gamma' \cdot \phi$, also $\Gamma = \Lambda \circ \Gamma' \cdot \phi = \psi \cdot \phi$. Daraus folgt $\Gamma = \psi \cdot \phi$.

Damit ist Theorem 7.2 vollständig bewiesen.

Aus der Konstruktion ergibt sich durch Vergleich mit Satz 6.2, daß für einen algebrierten Raum der Gestalt $(X, \overline{\mathcal{P}|X})$, wobei X ein kompakter Teil eines $\mathbb{C}^I$ ist, der Träger der Morphiehülle gleich der polynomkonvexen Hülle von X ist. Die morphischen Funktionen der Morphiehülle ergeben sich durch die damals beschriebene Fortsetzung.

Es ergeben sich weiterhin unmittelbar

Satz 7.3 Die Morphiehülle eines algebrierten Raums ist morph-vollständig. Ein algebrierter Raum ist dann und nur dann morph-vollständig, wenn er mit seiner Morphiehülle übereinstimmt.---

Corollar 7.4 $(X, \mathcal{F})$ sei ein algebraierter Raum, $(Y, \mathcal{G})$ ein morph-vollständiger Raum. Ist $\mathcal{G}$ isomorph zu $\mathcal{F}$, so ist $(Y, \mathcal{G})$ die Morphiehülle zu $(X, \mathcal{F})$.---

Corollar 7.5 Die Morphiehülle eines algebraierten Raums ist gleich der Morphiehülle des zugeordneten morph-separablen Raums. Die Morphiehülle eines morph-konvexen Raums ist gleich dem zugeordneten morph-separablen Raum.---

7 b. Man kann nicht nur morph Funktionen in die Morphiehülle fortsetzen, sondern auch morph Abbildungen.

Satz 7.6 Sei $\phi : X \rightarrow Y$ eine morph Abbildung zweier algebraierter Räume. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte morph Abbildung $\phi_h : h(X) \rightarrow h(Y)$ der Morphiehüllen, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{F} & \xleftarrow{\quad {}^t\phi \quad} & & \mathcal{G} & \\
 & \downarrow \Gamma & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & & \downarrow \Gamma' \\
 X & & & Y & \\
 \uparrow {}^t\Gamma & & \downarrow \Gamma & & \uparrow \Gamma' \\
 h(X) & \xrightarrow{\quad \phi_h \quad} & & h(Y) & \\
 \mathcal{F}_h & \xleftarrow{\quad {}^t\phi_h \quad} & & \mathcal{G}_h &
 \end{array}$$

kommutativ ist.---

Beweis:

Existenz: Man nehme für ϕ_h die in Satz 4.9 untersuchte Abbildung ${}^u\phi : \mathcal{G}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{G})$.

${}^u\phi$ ist stetig und es gilt ${}^u\phi \circ \Gamma = \Gamma' \circ \phi$.

Sei ${}^t\phi(g) = f$, dann ist

$${}^{tt}\phi(g_h)(\varphi) = g_h({}^u\phi(\varphi)) = g_h(\varphi \cdot {}^t\phi) = \varphi \cdot {}^t\phi(g) = \varphi(f) = f_h(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$, also ${}^{tt}\phi(g_h) = f_h$, daraus folgt

$${}^{tt}\phi(g_h) \in \mathcal{F}_h.$$

Wir haben somit eine morph Abbildung mit den gewünschten

Eigenschaften gefunden.

Eindeutigkeit:

Annahme: $\phi'_h \neq \phi_h$ sei eine zweite morphische Abbildung mit den geforderten Eigenschaften. Es gibt ein $x \in \mathcal{K}(X)$ mit

$$\phi'_h(x) = y' \neq \phi_h(x) = y.$$

Da $\mathcal{K}(\mathcal{Y})$ morph-separabel, gibt es ein $g_h \in \mathcal{G}_h$ mit $g_h(y) \neq g_h(y')$. Jetzt ist ${}^t\phi_h(g_h)(x) = g_h(y)$ und ${}^t\phi'_h(g_h)(x) = g_h(y')$, daraus folgt ${}^t\phi_h \neq {}^t\phi'_h$. Es gilt aber ${}^t\phi_h = {}^t\phi'_h$, denn ${}^t\phi_h = {}^t\Gamma^{-1} \cdot {}^t\phi \cdot {}^t\Gamma = {}^t\phi'_h$. Widerspruch!

q.e.d.

§ 8. DER ŠILOVRAND EINES ALGEBRIERTEN RAUMS

8 a. Der Begriff des Šilovrandes spielte bis jetzt in der Theorie der Banachalgebren eine Rolle. Er wurde zuerst von Šilov zur Behandlung der Frage eingeführt, wann sich ein maximales Ideal einer Banachalgebra zu einem maximalen Ideal einer Oberalgebra erweitern läßt (vgl. [GRS]). Neuerdings ist der Šilovrand auch in der Funktionentheorie bedeutsam geworden (vgl. [Br]). Wir definieren den Šilovrand als ein gewisses Analogon zur Morphiehülle. Suchte man dort den maximalen Träger einer Funktionenalgebra, so sucht man hier den minimalen Träger.

Definition 8.1 Der morph-separable Raum $\mathcal{A}(\mathcal{X}) = (\mathcal{A}(X), \mathcal{F})$ heißt Šilovrand des morph-separablen Raums $\mathcal{X} = (X, \mathcal{F})$, wenn gilt:

- Es gibt eine morphische Abbildung $\Sigma: \mathcal{A}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$, so daß ${}^t\Sigma: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist.
- Zu jedem morph-separablen Raum $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{G})$, zu dem es eine morphische Abbildung $\phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ gibt, so daß ${}^t\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Isomorphismus ist, existiert eine

morphe Abbildung $\psi: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{Y}$ mit $\Sigma = \phi \cdot \psi$.

Unter dem Šilovrand eines beliebigen algebrierten Raums versteht man den Šilovrand des zugeordneten morph-separablen Raums.---

Bemerkung: Exakt sollte man für den Träger des Šilovrands

$\mathcal{A}^{\mathcal{F}}(X)$ schreiben, da er von der Strukturalgebra abhängt.

Wir werden jedoch, solange keine Verwechslungen zu befürchten sind, immer nur $\mathcal{A}(X)$ schreiben.

Theorem 8.2

1) Zu jedem algebrierten Raum gibt es einen Šilovrand, der bis auf bimorphe Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

2) Räume mit isomorphen Strukturalgebren besitzen bimorph äquivalente Šilovränder.---

Beweis:

1) Wir brauchen nur die Šilovränder morph-separabler Räume zu betrachten.

Nach Hilfssatz 4.5 b) muß Σ injektiv sein, wir können also $\mathcal{A}(X)$ als abgeschlossenen (topologischen) Teilraum von X auffassen. ${}^{\tau}\Sigma$ ist dann die Beschränkung der Funktionen aus $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{A}(X)$. ${}^{\tau}\Sigma$ ist nun genau dann ein Isomorphismus, wenn es normerhaltend ist, (vgl. Satz 2.8), also alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{A}(X)$ das Maximum ihres Betrages annehmen. $\mathcal{A}(X)$ ist daher eine minimale abgeschlossene Teilmenge von X mit der Eigenschaft, daß alle morphen Funktionen auf ihr das Maximum ihres Betrages annehmen. (Dies ist die ursprüngliche Definition des Šilovrands, vgl. [L]. Dort findet sich auch der nun folgende Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis).

Für $f \in \mathcal{F}$ sei $M_f = \{x \in X : |f(x)| = \|f\|\}$ die Menge, auf der f das Maximum seines Betrages annimmt. M_f ist nicht leer und kompakt. Sei $\mathcal{D}$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen $S \subset X$ mit $S \cap M_f \neq \emptyset$ für alle $f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{D}$ ist durch die mengentheoretische Relation $\supset$ induktiv geordnet. Denn sei $\mathcal{D}_1 = \{S_i, i \in I\}$ eine linear geordnete Unter-
menge von $\mathcal{D}$. Dann bildet $\{S_i \cap M_f, i \in I\}$ eine Filter-
basis abgeschlossener Mengen im kompakten Raum X , also
gilt $\bigcap (S_i \cap M_f) = (\bigcap S_i) \cap M_f \neq \emptyset$, d.h. $\bigcap S_i \in \mathcal{D}$.
Nach dem Zornschen Lemma gibt es also minimale Elemente
in $\mathcal{D}$, wir müssen noch zeigen, daß es nur eines gibt.

Seien S_1 und S_2 zwei verschiedene minimale Elemente von $\mathcal{D}$.
Wir wählen einen Punkt $x_1 \in S_1 \cap S_2$ und eine offene Um-
gebung $U(x_1) \subset S_2$, die wir, da die Topologie von X von
 $\mathcal{F}$ induziert wird (Satz 5.5), in der Form

$$(1) \quad U = \bigcap_{i=1}^n \{x : |f_i(x)| < \varepsilon\}$$

mit geeignetem $\varepsilon > 0$ und $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ schreiben können.
Wir können außerdem voraussetzen, daß $\|f_i\| \leq 1$. Da S_1
minimal ist, gibt es eine Funktion $g' \in \mathcal{F}$, für die
 $(S_1 \cap U) \cap M_{g'} = \emptyset$, d.h. $\sup_{x \in S_1 \cap U} |g'(x)| < \|g'\|$. Wir können
sogar ein $g \in \mathcal{F}$ finden mit

$$(2) \quad \|g\| = 1 \quad \text{und} \quad \sup_{x \in S_1 \cap U} |g(x)| < \varepsilon,$$

nämlich $g = \left(\frac{g'}{\|g'\|}\right)^m$ mit genügend großem m .

Aus (1) und (2) folgt

$$\sup_{x \in S_1} |f_i(x)g(x)| < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Da jede morphhe Funktion auf S_1 das Maximum ihres Betrages

annimmt, folgt daraus

$$(3) \quad \|f_i g\| < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Wegen (2) gibt es ein $x_2 \in S_2$ mit $|g(x_2)| = 1$, zusammen mit (3) ergibt sich

$$|f_i(x_2)| < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

d.h. aber $x_2 \in U \subset S_2$. Widerspruch!

Die eindeutig bestimmte minimale Menge aus $\mathcal{O}$ nehmen wir als $\mathcal{A}(X)$, die auf $\mathcal{A}(X)$ beschränkten Funktionen aus $\mathcal{F}$ als $\mathcal{F}_2$. $(\mathcal{A}(X), \mathcal{F}_2)$ hat dann die geforderten Eigenschaften des Šilovrands.

2) Es seien die Strukturalgebren von X und Y isomorph. Dann gilt $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(Y)$ (das Gleichheitszeichen bedeutet bimorphe Äquivalenz), d.h. $\mathcal{A}(\mathcal{A}(X)) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(Y))$, daraus folgt nach dem weiter unten bewiesenen Satz 8.4 2) $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(Y)$.

q.e.d.

Aus dem Beweis ergibt sich

Satz 8.3 Ein Punkt x eines morph-separablen Raums gehört genau dann zum Šilovrand, wenn zu jeder Umgebung U von x eine morph Funktion f existiert, die in U das Maximum ihres Betrages annimmt und überall in $\overline{U}$ einen Betrag kleiner als dieses Maximum hat.---

Satz 8.4 Für einen beliebigen algebrierten Raum X gilt

$$1) \quad \mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(X))$$

$$2) \quad \mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(X))$$

(Das Gleichheitszeichen bedeutet bimorphe Äquivalenz).---

Beweis: 1) Dies folgt nach Theorem 7.2 daraus, daß die Strukturalgebren von X und $\mathcal{A}(X)$ isomorph sind.

2) Dies beweisen wir ohne Benutzung von Theorem 8.2 2).
Wir zeigen, daß $s(h(X))$ alle charakteristischen Eigenschaften eines Šilovrands von X hat.

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow \Omega & \searrow & \\ s(X) & \xrightarrow{\Sigma} & \tilde{X} & \longrightarrow & h(X) \\ & & \nearrow s(h(X)) & & \end{array}$$

zu a) Weil $s(h(X))$ Šilovrand von $h(X)$ ist, gibt es eine morphische Abbildung $\Xi: s(h(X)) \rightarrow s(X)$. ${}^t\Xi$ ist ein Isomorphismus. Die Zusammensetzung $\Sigma \cdot \Xi$ liefert eine morphische Abbildung $\Sigma': s(h(X)) \rightarrow \tilde{X}$, wobei ${}^t\Sigma'$ ein Isomorphismus ist.

zu b) Ist $\mathcal{V}$ irgend ein morph-separabler Raum und $\Phi: \mathcal{V} \rightarrow \tilde{X}$ eine morphische Abbildung, so daß ${}^t\Phi$ ein Isomorphismus ist, so gibt es eine morphische Abbildung $\Psi: s(X) \rightarrow \mathcal{V}$ mit $\Sigma = \Phi \cdot \Psi$, also auch eine morphische Abbildung $\Psi': s(h(X)) \rightarrow \mathcal{V}$ mit $\Sigma' = \Phi \cdot \Psi'$, nämlich $\Psi' = \Psi \cdot \Xi$.

Also ist $s(h(X))$ ein Šilovrand von X . Da der Šilovrand von X aber eindeutig bestimmt ist, gilt $s(X) = s(h(X))$.

q.e.d.

Bemerkung: Eine zu 2) analoge Aussage wurde von H.J. Bremermann [Br] bewiesen. Auch zur Aussage 1) gibt es ein funktionentheoretisches Analogon: Gegeben sei ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{C}^n$. Man fragt sich, bei welchen Randpunkten man eine kleine Umgebung aus dem Gebiet wegschneiden kann, um trotzdem noch zur selben Holomorphiehülle zu gelangen. In [Br] wird gezeigt, daß dies genau bei den Randpunkten der

Satz 8.6 Stimmen zwei morphe Abbildungen ϕ_1 und ϕ_2 eines algebrierten Raumes X in einen morph-separablen Raum Y auf dem Šilovrand von X überein, so sind sie überhaupt identisch.---

Beweis: Annahme: $\phi_1(x) = y_1 \neq y_2 = \phi_2(x)$. Es gibt ein $g \in \mathcal{G}$ mit $g(y_1) \neq g(y_2)$, d.f. ${}^t\phi_1(g)(x) \neq {}^t\phi_2(g)(x)$, das heißt ${}^t\phi_1(g) \neq {}^t\phi_2(g)$. Es ist aber ${}^t\phi_1 = {}^t\Omega \cdot ({}^t\Sigma)^{-1} \cdot {}^t\phi_{1\lambda}$ und ${}^t\phi_{1\lambda} = {}^t\phi_{2\lambda}$. Daraus folgt ${}^t\phi_1 = {}^t\phi_2$. Widerspruch!

Eine morphe Funktion ist nach dem vorher Gesagten eindeutig bestimmt, wenn ihre Werte auf dem Šilovrand bekannt sind. Es gibt sogar in Analogie zur Cauchyschen Integralformel eine Integraldarstellung, die es gestattet, den Wert einer Funktion an einer beliebigen Stelle durch Integration auf dem Šilovrand zu ermitteln (vgl. [AS]).

Satz 8.7 Gegeben sei ein algebrierter Raum $(X, \mathcal{F})$.

Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es ein Maß μ_x auf den Borelschen Mengen von $\mathcal{A}(X)$, so daß

$$f(x) = \int_{\mathcal{A}(X)} f_{\mathcal{A}} d\mu_x \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}. \quad \text{---}$$

Beweis: Die Zuordnung $f \rightarrow f(x)$ entspricht einem Homomorphismus $\varphi_x \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$, und da $\mathcal{F}$ zu $\mathcal{F}_0$ isomorph ist, ist die Zuordnung $f_{\mathcal{A}} \rightarrow f(x)$ ein Homomorphismus $\psi_x \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_0)$. ψ_x kann als stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{F}_0$ nach dem Theorem von Hahn-Banach auf ganz $\mathcal{C}(\mathcal{A}(X))$ fortgesetzt werden. Nun wenden wir den Darstellungssatz von Kakutani-Riesz an, und wir sind fertig. Wir brauchen den Satz in folgender Form (vgl. [A] und [Sch]):

Ist K ein kompakter Raum und ψ ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{C}(K)$, so gibt es ein Maß μ auf den Borelschen

Mengen von K , so daß für alle $f \in \mathcal{C}(K)$ gilt:

$$\psi(f) = \int_K f d\mu$$

Umgekehrt liefert jedes Maß ein stetiges, lineares Funktional.

Die Integraldarstellung ist aber nicht eindeutig, wenn

$\mathcal{F}_0 \neq \mathcal{C}(s(X))$ (dies gilt nach Satz 8.4 und 8.5 immer, wenn $s(X) \neq h(X)$), denn dann ist die Fortsetzung von ψ_x vieldeutig. Sind μ_x und μ'_x zwei verschiedene Darstellungen, so ist die Differenz $\nu = \mu_x - \mu'_x$ nicht identisch null, aber es gilt

$$\int_{s(X)} f_0 d\nu = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Umgekehrt läßt sich jedes Maß ν mit dieser Eigenschaft als Differenz von Darstellungen zweier verschiedener Fortsetzungen erhalten.- Die obige Formel kann man als Analogon des Cauchyschen Integralsatzes auffassen.

§ 9. DEFINITIONSMETHODEN FÜR EINE ALGEBRIERTE STRUKTUR

In der Topologie kann man auf folgende Weisen auf einer Menge M eine topologische Struktur definieren:

a) Gegeben seien topologische Räume L_i , $i \in I$, und Abbildungen $\phi_i : L_i \rightarrow M$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte feinste Topologie auf M , so daß alle Abbildungen ϕ_i stetig werden.

b) Gegeben seien topologische Räume N_j , $j \in J$, und Abbildungen $\psi_j : M \rightarrow N_j$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte größte Topologie auf M , so daß alle Abbildungen ψ_j stetig werden.

So ist etwa die Topologie auf dem Produkt $\prod_{j \in J} M_j$ topolo-

gischer Räume M_j definiert als die gröbste Topologie, durch die die Projektionen stetig werden.- Die Topologie der topologischen Summe $M_1 + M_2$ zweier (punktfremder) topologischer Räume M_1 und M_2 ist die feinste Topologie, die die Einbettungen stetig macht.- Die Relativtopologie auf einer Teilmenge M' eines topologischen Raums M kann charakterisiert werden als die gröbste Topologie, welche die Einbettung stetig macht.

Analoge Definitionsmethoden für eine algebrierte Struktur auf einem kompakten Raum wollen wir jetzt untersuchen.

Eine auf einem kompakten Raum durch eine Banachalgebra $\mathcal{F}_1$ stetiger Funktionen gegebene algebrierte Struktur heißt feiner (bzw. gröber) als eine durch $\mathcal{F}_2$ gegebene, falls $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$ (bzw. $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$). Die feinste algebrierte Struktur unter allen möglichen besteht aus allen stetigen Funktionen, die gröbste nur aus den konstanten Funktionen.

Zu jeder Menge $\{\mathcal{F}_i, i \in I\}$ algebrierter Strukturen auf einem kompakten Raum X gibt es eine eindeutig bestimmte untere Grenze (die feinste algebrierte Struktur, die gröber ist als alle gegebenen), nämlich $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ (dies ist offensichtlich wieder eine Banachalgebra), und eine eindeutig bestimmte obere Grenze (die gröbste algebrierte Struktur, die feiner ist als alle gegebenen), nämlich $\overline{\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i}$.

a) Ist nun ein kompakter Raum X gegeben und algebrierte Räume $(W_i, \mathcal{E}_i)$, $i \in I$, sowie stetige Abbildungen $\phi_i: W_i \rightarrow X$, so ist diejenige algebrierte Struktur $\mathcal{F}$ auf X wohlbestimmt, welche die feinste ist, so daß alle Abbildungen $(\phi_i, {}^t\phi_i)$ morph werden.

Die Abbildungen sind sicher dann alle morph, wenn man X mit der Banachalgebra der konstanten Funktionen versieht.

Man sieht leicht, daß die gesuchte Struktur gegeben wird durch $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} {}^t\bar{\phi}_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$, wobei ${}^t\bar{\phi}_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$ das Urbild von $\mathcal{E}_i$ bei der Abbildung ${}^t\phi_i : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(W_i)$ bedeutet.

Die Funktionen aus ${}^t\bar{\phi}_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$ kann man so erhalten: Man nehme solche Funktionen $f \in \mathcal{E}_i$, die auf denjenigen Punktmengen konstant sind, welche durch ϕ_i in einen Punkt geworfen werden. Man erhält aus f eine Funktion f' auf $\phi_i(W_i)$. f' ist auf $\phi_i(W_i)$ stetig, denn ist A eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{C}$, so ist $\bar{f}^{-1}(A) = \phi_i^{-1}(\bar{f}(A))$ abgeschlossen, da f stetig und ϕ_i eine abgeschlossene Abbildung ist. Das so erhaltene f' setze man auf alle möglichen Weisen stetig auf ganz X fort. Mindestens eine solche Fortsetzung ist nach dem Theorem von Urysohn möglich. Offensichtlich erhält man so alle Funktionen aus ${}^t\bar{\phi}_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$.

b) Ist X ein kompakter Raum und sind $(Y_j, \mathcal{G}_j)$, $j \in J$, algebraisierte Räume und $\psi_j : X \rightarrow Y_j$ stetige Abbildungen, so gibt es eine eindeutig bestimmte algebraisierte Struktur $\mathcal{F}$ auf X , die die größte unter denen ist, die alle Abbildungen $(\psi_j, {}^t\psi_j)$ morph machen.

Die Abbildungen werden sicher dann alle morph, wenn man X mit der Banachalgebra aller stetigen Funktionen versieht.

Die gesuchte algebraisierte Struktur wird gegeben durch

$$\mathcal{F} = \left[\bigcup_{j \in J} {}^t\psi_j(\mathcal{G}_j) \right].$$

Satz 9

a) Es seien $W_i = (W_i, \mathcal{E}_i)$ ($i \in I$), $X = (X, \mathcal{F})$ und $Y = (Y, \mathcal{G})$ algebraisierte Räume, $\phi_i : W_i \rightarrow X$ morphische Abbildungen.

X trage die feinste algebraisierte Struktur, die diese Abbil-

dungen morph macht.

Ist dann ψ eine stetige Abbildung von X in Y , so ist

$\psi: X \rightarrow Y$ genau dann morph, wenn alle Abbildungen $\psi \cdot \phi_i: W_i \rightarrow Y$ morph sind.

b) Es seien $W = (W, \mathcal{E})$, $X = (X, \mathcal{F})$ und $Y_j = (Y_j, \mathcal{G}_j)$ ($j \in J$) algebraisierte Räume, $\psi_j: X \rightarrow Y_j$ morphische Abbildungen.

X trage die grösste algebraisierte Struktur, die diese Abbildungen morph macht.

Ist dann ϕ eine stetige Abbildung von W in X , so ist

$\phi: W \rightarrow X$ genau dann morph, wenn alle Abbildungen $\psi_j \cdot \phi: W \rightarrow Y_j$ morph sind.---

Beweis: a) Die eine Richtung ist trivial. Nun sei bekannt, daß alle Abbildungen $\psi \cdot \phi_i: W_i \rightarrow Y$ morph sind. Dann ist ${}^t(\psi \cdot \phi_i)(\mathcal{G}) = {}^t\phi_i({}^t\psi(\mathcal{G})) \subset \mathcal{E}_i$, d.h. ${}^t\psi(\mathcal{G}) \subset {}^t\phi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$ für alle $i \in I$, d.h. ${}^t\psi(\mathcal{G}) \subset \bigcap_{i \in I} {}^t\phi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) = \mathcal{F}$. Das bedeutet, daß die Abbildung $\psi: X \rightarrow Y$ morph ist.

b) Seien alle Abbildungen $\psi_j \cdot \phi: W \rightarrow Y_j$ morph. Dann ist ${}^t(\psi_j \cdot \phi)(\mathcal{G}_j) = {}^t\phi({}^t\psi_j(\mathcal{G}_j)) \subset \mathcal{E}$ für alle $j \in J$, d.h. ${}^t\phi(\bigcup_j {}^t\psi_j(\mathcal{G}_j)) \subset \mathcal{E}$. Da $\mathcal{F} = \overline{\bigcup_j {}^t\psi_j(\mathcal{G}_j)}$, gilt auch ${}^t\phi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$, d.h. $\phi: W \rightarrow X$ ist morph.

§ 10. TEILRÄUME EINES ALGEBRIERTEN RAUMS

Sei $(X, \mathcal{F})$ ein algebraisierter Raum, Y eine abgeschlossene (d.h. kompakte) Teilmenge von X . Als topologischer Teilraum trägt Y die grösste Topologie, die die Einbettung stetig macht. Wir versehen nun noch Y mit der grössten algebraisierten Struktur, die die Einbettung zu einer morphen Abbildung macht. Den so entstehenden algebraisierten Raum,

nämlich $(Y, \overline{\mathcal{F}|Y})$, nennen wir einen (algebrierten) Teilraum von $(X, \mathcal{F})$. (Stillschweigende Voraussetzung $Y \neq \emptyset$)

Ist $(X_1, \mathcal{F}_1)$ Teilraum von $(X, \mathcal{F})$ und $(X_2, \mathcal{F}_2)$ Teilraum von $(X_1, \mathcal{F}_1)$, so ist $(X_2, \mathcal{F}_2)$ auch Teilraum von $(X, \mathcal{F})$. Es gilt nämlich $\overline{\mathcal{F}|X_1|X_2} = \overline{\mathcal{F}|X_2}$.

Satz 10.1 Sei $(X, \mathcal{F})$ ein morph-konvexer Raum und Y eine kompakte Teilmenge von X mit

$$Y = h_{\mathcal{F}}(Y) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \{x \in X : |f(x)| \leq \sup_{y \in Y} |f(y)|\}.$$

Dann ist der Teilraum $(Y, \overline{\mathcal{F}|Y})$ morph-konvex.---

Beweis: Sei φ ein Homomorphismus von $\overline{\mathcal{F}|Y}$ auf $\mathbb{C}$. Man hat den Beschränkungshomomorphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{F}|Y}$. Die Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \varphi$ liefert einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$. Da $(X, \mathcal{F})$ morph-konvex ist, gibt es einen Punkt $x \in X$, so daß $\psi(f) = f(x)$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Der Punkt x muß in Y liegen, da es sonst eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ gäbe mit $|f(x)| > \|f|Y\|$ und es wäre $|\varphi(f|Y)| = |\psi(f)| = |f(x)| > \|f|Y\|$, was wegen der Stetigkeit von φ nicht möglich ist. x liegt also in Y , daher gilt für alle $g \in \overline{\mathcal{F}|Y}$

$$\varphi(g) = g(x).$$

q.e.d.

Bemerkung: Die Bedingung $Y = h_{\mathcal{F}}(Y)$ ist nicht notwendig dafür, daß $(Y, \overline{\mathcal{F}|Y})$ morph-konvex ist.

Beispiel: Sei $(Y, \mathcal{G})$ ein morph-vollständiger Raum. Wir fügen zu Y einen isolierten Punkt x_0 hinzu und erhalten so den kompakten Raum $X = Y + \{x_0\}$. Wir setzen $\mathcal{G}$ zu einer Funktionenalgebra $\mathcal{F} = \hat{\mathcal{G}}$ auf X fort, indem wir einen Punkt $y_0 \in Y$ auszeichnen, und für jedes $g \in \mathcal{G}$ die Fortsetzung $\hat{g}$ so definieren:

$$\hat{g}(y) = g(y) \quad \text{für } y \in Y$$

$$\hat{g}(x_0) = g(y_0)$$

$(X, \mathcal{F})$ ist morph-konvex, ebenso $(Y, \overline{\mathcal{F}|Y}) = (Y, \mathcal{G})$, aber es gilt $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(Y) = X \neq Y$.

Die Bedingung $Y = \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(Y)$ ist jedoch auch notwendig, wenn $(X, \mathcal{F})$ morph-vollständig ist, wie aus dem nächsten Satz folgt.

Satz 10.2 Sei $(X, \mathcal{F})$ ein morph-vollständiger Raum und Y eine kompakte Teilmenge von X . Dann gilt für die Morphiehülle des Teilraums $(Y, \overline{\mathcal{F}|Y})$:

$$\mathcal{H}(Y, \overline{\mathcal{F}|Y}) = (\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(Y), \overline{\mathcal{F}|\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(Y)})$$

Beweis: Man hat sich nur zu überzeugen, daß $\overline{\mathcal{F}|Y}$ isomorph zu $\overline{\mathcal{F}|\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(Y)}$ und $(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(Y), \overline{\mathcal{F}|\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(Y)})$ morph-vollständig ist. Das letztere folgt aus dem vorigen Satz.

Definition 10.3 $(X, \mathcal{F})$ sei ein algebrierter Raum, $\mathcal{F}_1$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}$. Dann heißt

$$Y := \bigcap_{f \in \mathcal{F}_1} \{y \in X : f(y) = 0\}$$

lytische Teilmenge von X , und, falls Y nicht leer ist, $(Y, \overline{\mathcal{F}|Y})$ lytischer Teilraum von $(X, \mathcal{F})$.---

Ein algebrierter Raum ist lytischer Teilraum von sich selbst. Die Vereinigung von endlich vielen und der Durchschnitt von beliebig vielen lytischen Teilmengen eines algebrierten Raums ist wieder lytisch.

Satz 10.4 Ein lytischer Teilraum eines morph-

 { separablen
konvexen
vollständigen }

 Raums ist wieder morph-

 { separabel
konvex
vollständig }
 .----

Beweis: Man hat sich nur zu überlegen, daß für eine lytische Teilmenge Y des algebraisierten Raums $(X, \mathcal{F})$ gilt $\mathcal{H}_Y(Y) = Y$.

§ 11. DIREKTE SUMME UND TENSORPRODUKT

11 a. Direkte Summe zweier algebraisierter Räume

Sind $(X, \mathcal{F})$ und $(Y, \mathcal{G})$ zwei algebraisierte Räume, so kann man die topologische Summe $X+Y$ der als punktfremd betrachteten kompakten Räume X und Y bilden, die wieder kompakt ist. Die Topologie auf $X+Y$ ist die feinste der Topologien, die die beiden Einbettungen $X \rightarrow X+Y$ und $Y \rightarrow X+Y$ stetig machen. Wir versehen nun $X+Y$ mit der feinsten algebraisierten Struktur, so daß diese Einbettungen morphische Abbildungen werden und nennen den entstehenden algebraisierten Raum die direkte Summe der algebraisierten Räume $(X, \mathcal{F})$ und $(Y, \mathcal{G})$. Für die direkte Summe schreiben wir

$$(X, \mathcal{F}) \oplus (Y, \mathcal{G}) = (X+Y, \mathcal{F} \oplus \mathcal{G})$$

Man überlegt sich leicht, daß die Strukturalgebra $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ aus allen Funktionen der Gestalt $f \oplus g$, $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{G}$ besteht, wobei

$$(f \oplus g)(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in X \\ g(z) & \text{für } z \in Y \end{cases}$$

Es gelten folgende Rechenregeln, die die Bezeichnung direkte Summe für $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ rechtfertigen:

$$\|f \oplus g\| = \sup(\|f\|, \|g\|)$$

$$(f \oplus g) + (f' \oplus g') = (f + f') \oplus (g + g')$$

$$\lambda(f \oplus g) = (\lambda f) \oplus (\lambda g)$$

$$(f \oplus g) \cdot (f' \oplus g') = (ff') \oplus (gg')$$

Die Funktionen der Gestalt $f \otimes 0$ bilden ein Ideal $\mathcal{F} \otimes 0$ in $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, das zu $\mathcal{F}$ isomorph ist. Ebenso ist das Ideal $0 \otimes \mathcal{G}$ zu $\mathcal{G}$ isomorph.

Folgende beiden Sätze sind ziemlich trivial, auf ihren Beweis sei daher verzichtet.

Satz 11.1 $X \otimes Y$ ist morph-separabel (-konvex, -vollständig) genau dann, wenn X und Y morph-separabel (-konvex, -vollständig) sind.---

Satz 11.2

- 1) $\widetilde{X \otimes Y} = \widetilde{X} \otimes \widetilde{Y}$
- 2) $\mathcal{K}(X \otimes Y) = \mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{K}(Y)$
- 3) $\mathcal{J}(X \otimes Y) = \mathcal{J}(X) \otimes \mathcal{J}(Y)$ ---

Die topologische Summe zweier Räume ist unzusammenhängend.

Es entsteht die Frage, ob ein algebrierter Raum, dessen Träger unzusammenhängend ist, eine Zerlegung in eine direkte Summe gestattet. Diese Frage ist im allgemeinen zu verneinen. Wir geben unter a) einen morph-konvexen, unter b) einen morph-separablen Raum mit unzusammenhängendem Träger an, die nicht zerlegbar sind.

a) Man nehme als Träger den aus zwei diskreten Punkten bestehenden kompakten Raum und als Strukturalgebra die konstanten Funktionen. Wäre eine Zerlegung möglich, so müßte eine morph Funktion existieren, die auf dem einen Punkt den Wert null und auf dem andern den Wert eins hat.

b) Man setze $X = T_1 \cup T_2$, wobei $T_i = \{z \in \mathbb{C} : |z| = i\}$ und $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{P}}|X$. Der algebrierte Raum $(X, \mathcal{F})$ ist nicht zerlegbar, da keine Funktion $f \in \mathcal{F}$ existiert mit $f|_{T_1} = 0$ und $f|_{T_2} = 1$.

Eine Zerlegung ist jedoch möglich, wenn der algebrierte

Raum morph-vollständig ist, wie folgender Satz, der auf Šilov [Ši] zurückgeht, lehrt.

Satz 11.3 $(X, \mathcal{F})$ sei morph-vollständig, X_1 und X_2 seien punktfremde, nichtleere, abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = X_1 \cup X_2$. Dann gilt $(X, \mathcal{F}) = (X_1, \mathcal{F}|_{X_1}) \oplus (X_2, \mathcal{F}|_{X_2})$.---

Unter den Voraussetzungen des Satzes gibt es nämlich, wie wir in Hilfssatz 16.5 beweisen werden, eine Funktion $g \in \mathcal{F}$ mit $g|_{X_1} = 1$ und $g|_{X_2} = 0$.

Alle Betrachtungen über die direkte Summe lassen sich ohne Schwierigkeit auf eine beliebige endliche Anzahl von Summanden ausdehnen.

11 b. Tensorprodukt algebrierter Räume

Sei $(X_i, \mathcal{F}_i)$, $i \in I$, eine Familie von algebrierten Räumen. Man kann das topologische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ bilden, das wieder kompakt ist. Die Produkttopologie ist die größte Topologie, die die Projektionen stetig macht. Wir versehen nun $\prod_{i \in I} X_i$ mit der größten algebrierten Struktur, so daß die Projektionen morphie Abbildungen werden und nennen den entstehenden algebrierten Raum das Tensorprodukt der Räume $(X_i, \mathcal{F}_i)$. Für das Tensorprodukt schreiben wir

$$\bigotimes_{i \in I} (X_i, \mathcal{F}_i) = \left(\prod_{i \in I} X_i, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i \right)$$

Man überlegt sich leicht, daß in $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ alle Funktionen folgender Art enthalten sind:

$$\bigotimes_{i \in I} f_i, \text{ wobei } f_i \in \mathcal{F}_i \text{ und fast alle } f_i = 1$$

$$\left(\bigotimes_{i \in I} f_i \right) \left((x_i)_{i \in I} \right) := \prod_{i \in I} f_i(x_i),$$

und daß $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ von diesen Funktionen erzeugt wird, d.h.

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i = \overline{\left[\left\{ \bigotimes_{i \in I} f_i \right\} \right]}.$$

$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ heißt das Tensorprodukt der Banachalgebren $\mathcal{F}_i$.

Es gelten die folgenden Rechenregeln, die wir der Bequemlichkeit halber nur für das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ zweier Banachalgebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ anschreiben:

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

$$\|f \otimes g\| = \|f\| \|g\|$$

$$f \otimes g + f' \otimes g = (f + f') \otimes g$$

$$f \otimes g + f \otimes g' = f \otimes (g + g')$$

$$\lambda(f \otimes g) = (\lambda f) \otimes g = f \otimes (\lambda g)$$

$$(f \otimes g)(f' \otimes g') = ff' \otimes gg'$$

Jede Funktion aus $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ kann beliebig genau approximiert werden durch Summen der Gestalt

$$\sum_{v=1}^n \bigotimes_{i \in I} f_i^{(v)}, \quad f_i^{(v)} \in \mathcal{F}_i, \quad \text{fast alle } f_i^{(v)} = 1.$$

Die Funktionen der Gestalt $1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes f_i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ bilden eine Unterálgebra isomorph zu $\mathcal{F}_i$. Diese Unterálgebra heiÙe $\hat{\mathcal{F}}_i$. Dann gilt

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i = \overline{\left[\bigcup_{i \in I} \hat{\mathcal{F}}_i \right]}.$$

Hált man bei einer Funktion aus $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ eine gewisse Anzahl von Variablen fest und láÙt nur x_j , $j \in J \subset I$, laufen, so erhált man eine Funktion aus $\bigotimes_{j \in J} \mathcal{F}_j$.

Für zwei spezielle Beispiele für Tensorprodukte von Funktionenalgebren siehe Corollar 13.3 und Satz 16.4.

Die Tensorproduktbildung ist assoziativ, d.h. es gilt

$$(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3 = X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)$$

für álgebrierte Räume X_1 , X_2 , X_3 und entsprechendes für eine beliebige Anzahl von Faktoren.

Bezüglich der Bildung der direkten Summe ist die Tensorproduktbildung distributiv, d.h. es gilt

$$X \otimes (Y_1 \oplus Y_2) = (X \otimes Y_1) \oplus (X \otimes Y_2)$$

für algebraisierte Räume X , Y_1 , Y_2 .

Satz 11.4 $\bigotimes_{i \in I} X_i$ ist morph- $\left\{ \begin{array}{l} \text{separabel} \\ \text{konvex} \\ \text{vollständig} \end{array} \right\}$ genau dann,

wenn alle X_i , $i \in I$, morph- $\left\{ \begin{array}{l} \text{separabel} \\ \text{konvex} \\ \text{vollständig} \end{array} \right\}$ sind.---

Dieser Satz folgt aus 1) und 2) des folgenden Satzes.

Satz 11.5 1) $\widetilde{\bigotimes X_i} = \bigotimes \widetilde{X_i}$

2) $h(\bigotimes X_i) = \bigotimes h(X_i)$

3) $\lambda(\bigotimes X_i) = \bigotimes \lambda(X_i)$ ---

Beweis:

Zu 1) und 2): Sei $\mathcal{G}_i$ ein Erzeugendensystem für $\mathcal{F}_i$,

$$\hat{\mathcal{G}}_i := 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \mathcal{G}_i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1.$$

$\bigcup \hat{\mathcal{G}}_i$ ist ein Erzeugendensystem für $\bigotimes \mathcal{F}_i$. Sei

$$\left(\bigtimes_{g_i \in \mathcal{G}_i} g_i \right) (X_i) =: Y_i \in \mathbb{C}^{\mathcal{G}_i}$$

$$\left(\bigtimes_{g_i \in \bigcup \hat{\mathcal{G}}_i} g_i \right) (\prod X_i) =: Y \in \mathbb{C}^{\bigcup \hat{\mathcal{G}}_i} = \prod \mathbb{C}^{\mathcal{G}_i}$$

Es gilt $\widetilde{X}_i = (Y_i, \overline{\mathcal{P}_i | Y_i})$ ($\mathcal{P}_i$ Polynome in $\mathbb{C}^{\mathcal{G}_i}$)

$\widetilde{\bigotimes X_i} = (Y, \overline{\mathcal{P} | Y})$ ($\mathcal{P}$ Polynome in $\mathbb{C}^{\bigcup \hat{\mathcal{G}}_i}$)

Nun ist aber

$$Y = \left(\bigtimes_{g_i \in \bigcup \hat{\mathcal{G}}_i} g_i \right) (\prod X_i) = \prod_{i \in I} \left(\left(\bigtimes_{g_i \in \hat{\mathcal{G}}_i} g_i \right) (\prod_{j \in I} X_j) \right) = \prod_{i \in I} Y_i$$

und 1) ist bewiesen.

Um die Morphiehüllen von X_i und $\bigotimes X_i$ zu erhalten, hat

man die polynomkonvexen Hüllen von Y_i bzw. $\prod Y_i$ zu bilden. Die Behauptung 2) ist daher gleichbedeutend damit, daß die polynomkonvexe Hülle eines Produkts gleich dem Produkt der polynomkonvexen Hüllen der Faktoren ist. Dies beweisen wir jetzt.

Sei $x \in \mathcal{H}_p(\prod Y_i)$. pr_i sei die Projektion von $\mathbb{C}^{U\mathcal{G}_i}$ auf $\mathbb{C}^{\mathcal{G}_i}$.

Wir zeigen, daß $pr_i(x) \in \mathcal{H}_p(Y_i)$ für alle $i \in I$.

Sei p_i irgend ein Polynom in $\mathbb{C}^{\mathcal{G}_i}$, $\hat{p}_i = p_i \cdot pr_i$ das geliftete Polynom in $\mathbb{C}^{U\mathcal{G}_i}$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$|\hat{p}_i(x)| \leq \sup_{y \in \prod Y_i} |p_i(y)|.$$

Daraus folgt

$$|p_i(pr_i(x))| \leq \sup_{y_i \in Y_i} |p_i(y_i)|$$

und daraus folgt $pr_i(x) \in \mathcal{H}_p(Y_i)$.

Nun sei umgekehrt $x_i \in \mathcal{H}_p(Y_i)$ für alle $i \in I$. Wir zeigen, daß $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{H}_p(\prod Y_i)$.

Sei p ein Polynom in $\mathbb{C}^{U\mathcal{G}}$. Es ist zu beweisen, daß

$$|p((x_i)_{i \in I})| \leq \sup_{y \in \prod Y_i} |p(y)|$$

Da p nur von endlich vielen Variablen abhängt, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß I endlich ist. Der Bequemlichkeit halber nehmen wir an, daß $I = \{1, 2\}$. Es ist leicht zu sehen, wie sich dann durch vollständige Induktion der Beweis für den Fall führen läßt, daß I aus n Elementen besteht.

Bei festem x_1 und laufendem y_2 ist $p(x_1, y_2)$ ein Polynom in $\mathbb{C}^{\mathcal{G}_2}$. Daher gilt nach Voraussetzung

$$|p(x_1, x_2)| \leq \sup_{y_2 \in Y_2} |p(x_1, y_2)|$$

Jetzt denken wir uns y_2 festgehalten. Dann ist $p(y_1, y_2)$

ein Polynom in $\mathbb{C}^n$. Dann gilt, da $x_1 \in k_2(Y_1)$

$$|p(x_1, y_2)| \leq \sup_{y_1 \in Y_1} |p(y_1, y_2)|$$

Insgesamt haben wir

$$|p(x_1, x_2)| \leq \sup_{y_2 \in Y_2} \sup_{y_1 \in Y_1} |p(y_1, y_2)| = \sup_{y \in \prod Y_i} |p(y)| \quad \text{q.e.d.}$$

Zu 3): Wegen 1) können wir uns auf den Fall beschränken, daß alle X_i und damit auch $\otimes X_i$ morph-separabel sind.

Nach Satz 8.3 gehört ein Punkt x eines morph-separablen Raumes genau dann zum Silovrand, wenn es zu jeder Umgebung U von x eine morphische Funktion gibt, die innerhalb U das Maximum ihres Betrages annimmt und außerhalb von U einen Betrag kleiner als dieses Maximum hat.

Sei x ein Punkt von $\prod \mathcal{S}(X_i)$ und U eine Umgebung von x , die wir in der Form $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_n} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_n} X_i$ annehmen können, wobei U_{i_ν} eine Umgebung von $\text{pr}_{i_\nu}(x) = x_{i_\nu} \in \mathcal{S}(X_{i_\nu})$ ist. Es gibt Funktionen $f_{i_\nu} \in \mathcal{F}_{i_\nu}$ mit der oben genannten Eigenschaft. Dann ist $f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \dots \otimes f_{i_n} \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots$ für $\prod_{i \in I} X_i$ eine solche Funktion. Also gilt $x \in \mathcal{S}(\prod X_i)$.

Nun sei $x \notin \prod \mathcal{S}(X_i)$, d.h. $\text{pr}_{i_0}(x) \notin \mathcal{S}(X_{i_0})$. Es gibt deshalb eine offene Umgebung U_{i_0} von $\text{pr}_{i_0}(x)$, so daß alle Funktionen aus $\mathcal{F}_{i_0}$ das Maximum ihres Betrages außerhalb von U_{i_0} annehmen. $U := U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i$ ist eine Umgebung von x . Ist f eine Funktion aus $\otimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$, und hält man $\text{pr}_i(x)$ für $i \neq i_0$ fest, so erhält man eine Funktion aus $\mathcal{F}_{i_0}$, wofür die obige Bemerkung gilt. Man erkennt, daß f außerhalb von U das Maximum seines Betrages annimmt. Also gilt $x \notin \mathcal{S}(\prod X_i)$.

Damit ist Satz 11.5 vollständig bewiesen.

Nun noch eine leicht zu verifizierende Bemerkung zur Cauchyschen Integralformel in einem Tensorprodukt algebraisierter Räume $\bigotimes_{i \in I} (X_i, \mathcal{F}_i)$:

Ist $x_i \in X_i$ und μ_i ein Maß auf $\mathcal{A}(X_i)$ mit

$$f_i(x_i) = \int_{\mathcal{A}(X_i)} f_i d\mu_i \quad \text{für alle } f_i \in \mathcal{F}_i,$$

so ist das Tensorprodukt $\mu = \bigotimes_{i \in I} \mu_i$ ein Maß auf $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(X_i)$

mit

$$f((x_i)_{i \in I}) = \int_{\prod_{i \in I} \mathcal{A}(X_i)} f d\mu \quad \text{für alle } f \in \bigotimes \mathcal{F}_i$$

Dabei kann man das Produktmaß $\bigotimes \mu_i$ bekanntlich definieren als stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{C}(\prod_{i \in I} X_i)$, indem man für Funktionen der Gestalt

$$f = \bigotimes f_i, \quad f_i \in \mathcal{C}(\mathcal{A}(X_i)), \quad \text{fast alle } f_i = 1$$

setzt

$$\int_{\prod_{i \in I} \mathcal{A}(X_i)} f d\mu = \prod_{i \in I} \int_{\mathcal{A}(X_i)} f_i d\mu_i \quad (\text{fast alle Faktoren sind } 1)$$

und dann das Funktional linear und stetig auf ganz $\mathcal{C}(\prod_{i \in I} X_i)$ fortsetzt. (Dies ist nur auf eine Weise möglich).

§ 12. EINBETTUNG IN DEN POLYZYLINDER

$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ sei die Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene. $\overline{\mathcal{P}E}$ besteht aus allen Funktionen, die in E holomorph und in E stetig sind. Wir schreiben $\overline{\mathcal{P}E} = \mathcal{H}(E)$ und $\mathbb{E} = (E, \mathcal{H}(E))$. Der Raum $\mathbb{E}$ spielt in der Theorie der algebraisierten Räume die Rolle, die in der Funktionentheorie die komplexe Ebene spielt.

Mit $\mathbb{E}^n$ sei das n -fache Tensorprodukt von $\mathbb{E}$ mit sich selbst bezeichnet. Seine Strukturalgebra besteht aus allen stetigen Funktionen auf dem Polyzylinder $\mathbb{E}^n$, die im Innern holomorph sind.

Die lytischen Teilmengen von E^n sind analytische Mengen in E^n , die noch gewissen Stetigkeitsbedingungen gegen den Rand zu genügen.

Ist I eine beliebige Indexmenge, so besteht die Struktur-algebra von $E^I = (E^I, \mathcal{H}(E)^I)$ aus Funktionen, die nur von endlich vielen Variablen abhängen und in diesen im Innern des zugehörigen Polyzylinders holomorph und am Rand noch stetig sind, sowie aus den Funktionen, die durch solche gleichmäßig approximiert werden können. Hält man bei einer beliebigen Funktion aus $\mathcal{H}(E)^I$ alle bis auf n Veränderliche fest, so bekommt man wieder eine in E^n holomorphe und auf E^n stetige Funktion. Natürlich ist $\mathcal{H}(E)^I = \overline{\mathcal{P}E^I}$. Alle Räume E , E^n , E^I sind morph-vollständig, da E polynomkonvex ist.

Man kann folgende Charakterisierung einer morphen Funktion geben:

Sei X ein algebrierter Raum. Dann ist eine Funktion f auf X genau dann morph, wenn die durch λf (λ beliebig mit $|\lambda| \leq \frac{1}{\|f\|}$) gegebene Abbildung von X in E morph ist.

Einen morph-separablen Raum kann man bekanntlich (Corollar 5.4) in der Form $(X, \overline{\mathcal{P}X})$ darstellen, wo X ein kompakter Teil eines C^I ist. Daraus folgt, daß jeder morph-separable Raum einem Teilraum eines E^I bimorph äquivalent ist.

Sei $(X, \mathcal{F})$ ein algebrierter Raum und $(Y, \mathcal{G})$ ein Teilraum des E^I . Eine Abbildung von X in Y wird dann durch ein Produkt $\bigtimes_{i \in I} f_i$, wobei f_i Funktionen auf X sind, beschrieben. Es gilt: Diese Abbildung ist genau dann morph, wenn sämtliche Funktionen f_i morph sind. Dies kann man z.B.

mittels Satz 9 schließen.

Die lytischen Teilräume eines E^I sind nach Satz 10.4 morph-vollständig. Es gilt auch die Umkehrung:

Theorem 12.1

Jeder morph-vollständige Raum läßt sich bimorph auf einen lytischen Teilraum eines E^I abbilden.---

Beweis:

Sei $(X, \mathcal{F})$ ein morph-vollständiger Raum, den wir uns als Teilraum des E^J vorstellen. Nach Satz 10.2 gibt es Funktionen $f_k \in \mathcal{K}(E)^J$ ($k \in K$), so daß

$$X = \bigcap_{k \in K} \{x \in E^J : |f_k(x)| \leq 1\}.$$

x_j ($j \in J$) seien die Koordinaten in E^J . Wir betrachten den Raum $E^{J \cup K}$. Die ersten J Koordinaten mögen y_j ($j \in J$) heißen, die letzten K Koordinaten z_k ($k \in K$).

Nun bilden wir $(X, \mathcal{F})$ bimorph auf einen lytischen Teilraum von $E^{J \cup K}$ ab mittels

$$\begin{aligned} y_j &= x_j & (j \in J) \\ z_k &= f_k(x) & (k \in K) \end{aligned}$$

Das Bild von X bei dieser Abbildung ist die durch

$$z_k - f_k(y) = 0 \quad (k \in K)$$

beschriebene lytische Teilmenge von $E^{J \cup K}$. Daß die Abbildung bimorph ist, folgt aus Hilfssatz 5.3. q.e.d.

Der Satz erinnert an den von R. Remmert [R1] bewiesenen Satz, daß sich jede Steinsche Mannigfaltigkeit auf eine analytische Teilmenge eines $\mathbb{C}^k$ biholomorph abbilden läßt.

Aus dem Satz läßt sich eine Folgerung ziehen, die als allgemeines Analogon eines Satzes von J. Wermer betrachtet

werden kann.

Satz 12.2 Sei $(X, \mathcal{F})$ ein morph-separabler Raum. Dann gibt es einen lytischen Teilraum $(Y, \mathcal{G})$ eines E^I , eine kompakte Teilmenge $\hat{X} \subset Y$ und eine topologische Abbildung $\wedge : \hat{X} \rightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:

Ist f eine morphe Funktion auf X , so läßt sich die durch $\hat{f} := f \circ \wedge$ auf $\hat{X}$ definierte Funktion eindeutig zu einer auf ganz Y morphen Funktion fortsetzen. Man erhält auf diese Weise alle auf Y morphen Funktionen.

Der Raum $(Y, \mathcal{G})$ ist eindeutig bestimmt in folgendem Sinn: Ist $(Y', \mathcal{G}')$ lytischer Teilraum von E^I , $\hat{X}'$ eine kompakte Teilmenge von Y' und $\wedge'$ eine topologische Abbildung von $\hat{X}'$ auf X mit den entsprechenden Eigenschaften, so gibt es eine bimorphe Abbildung (ϕ, ψ) von $(Y, \mathcal{G})$ auf $(Y', \mathcal{G}')$ mit $\phi(\hat{X}) = \hat{X}'$ und $\wedge = \wedge' \circ \phi$. ---

Beweis: $(Y, \mathcal{G})$ ist nach Corollar 7.4 die Morphiehülle von $(X, \mathcal{F})$, da $\mathcal{G}$ isomorph zu $\mathcal{F}$ und $(Y, \mathcal{G})$ morph-vollständig ist. Man denke sich also die Morphiehülle von $(X, \mathcal{F})$ gemäß Theorem 12.1 als lytischen Teilraum eines E^I realisiert. Dann folgen die Behauptungen des Satzes ohne weiteres.

J. Wermer untersuchte in [W1] einen Spezialfall genauer. Er bewies folgenden

Satz: Sei $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Peripherie des Einheitskreises der komplexen Ebene. f_1 und f_2 seien zwei stetige Funktionen auf X und $\mathcal{F} := \overline{[f_1, f_2]} \neq \mathcal{C}(X)$.

Ferner gelte:

- a) f_1 und f_2 trennen zusammen die Punkte von X .
- b) Es gibt ein $\delta > 0$, so daß die Funktionen f_1 und f_2 holo-

morph in den Kreisring $\{z : 1-\delta < |z| < 1+\delta\}$ fortgesetzt werden können.

c) $f_1(z) \neq 0$ für $|z| = 1$.

Dann existiert eine Riemannsche Fläche R und eine einfach geschlossene Kurve $\hat{X}$ auf R mit folgenden Eigenschaften: $\hat{X}$ berandet ein Gebiet G in R und $G \cup \hat{X}$ ist kompakt. Es gibt eine topologische Abbildung Λ von $\hat{X}$ auf X , so daß für jedes $f \in \mathcal{F}$ die durch $\hat{f} := f \circ \Lambda$ auf $\hat{X}$ definierte Funktion nach G fortgesetzt werden kann, so daß sie dort holomorph und in $G \cup \hat{X}$ stetig ist.---

C. Anwendungen und Beispiele

§ 13. APPROXIMATION STETIGER FUNKTIONEN

13 a. Sämtliche bis jetzt gemachten Betrachtungen lassen sich sinngemäß auf den Fall übertragen, wo der Körper der reellen Zahlen zugrunde gelegt ist, wenn die zusätzliche Forderung erfüllt ist, daß $(1+b^2)^{-1}$ existiert für jedes Element b einer Banachalgebra. Diese Forderung ist nötig, um einen dem Satz von Gelfand-Mazur (2.9) entsprechenden Satz beweisen zu können. (Siehe [GRS]). In Banachalgebren reeller Funktionen besitzt $1+f^2$ stets ein Inverses, denn es gilt die konvergente Potenzreihenentwicklung

$$(1+f^2)^{-1} = (1+\|f\|^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|f\|^2 - f^2}{1+\|f\|^2} \right)^n$$

Durch den Satz von Stone-Weierstraß (für einen Beweis siehe z.B. [L]) wird jedoch die Theorie der algebrierten Räume über den reellen Zahlen reduziert auf das Studium aller reellwertigen stetigen Funktionen auf einem kom-

pakten Raum.

Satz 13.1 (Stone-Weierstraß) Die Strukturalgebra eines morph-separablen Raums über den reellen Zahlen besteht aus allen stetigen reellwertigen Funktionen.---

Aus dem Satz folgt, daß jeder algebrierte Raum über den reellen Zahlen morph-konvex ist, denn der zugeordnete morph-separable Raum ist morph-vollständig (Corollar 6.7 und 6.4). Ferner folgt die interessante Tatsache, daß jede kompakte Menge in einem $\mathbb{R}^I$ polynomkonvex ist.

Nun wollen wir uns wieder algebrierten Räumen über den komplexen Zahlen zuwenden. Hier ergibt sich durch Betrachtung von Real- und Imaginärteil der Funktionen aus dem Satz von Stone-Weierstraß

Corollar 13.2 Ist $(X, \mathcal{F})$ ein morph-separabler Raum und ist $\mathcal{F}$ selbstadjungiert, d.h. gehört mit jeder Funktion f auch die konjugiert-komplexe Funktion f^* zu $\mathcal{F}$, so ist $\mathcal{F} = \mathcal{C}(X)$.---

Corollar 13.3 (Dieudonné [D]) Sind X_i , $i \in I$, kompakte Räume, so gilt

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{C}(X_i) = \mathcal{C}\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \quad \text{---}$$

Beweis: $(\prod X_i, \bigotimes \mathcal{C}(X_i))$ ist morph-separabel, da alle $(X_i, \mathcal{C}(X_i))$ es sind. $\bigotimes \mathcal{C}(X_i)$ ist auch selbstadjungiert, da alle $\mathcal{C}(X_i)$ es sind. Daraus folgt die Behauptung. Der Beweis von Dieudonné selbst entstand schon vor dem Satz von Stone-Weierstraß und benützt die Teilung der Einheit.

13 b. Wir ziehen jetzt einen Satz von Mergeljan (vgl. [M]) heran.

Satz 13.4 Sei X eine kompakte Teilmenge der komplexen Ebene vom Lebesgue-Maß null. Dann können alle stetigen Funktionen auf X gleichmäßig durch rationale Funktionen mit Polen außerhalb X approximiert werden, d.h. $\overline{\mathcal{R}_X} = \mathcal{C}(X)$.

Beweis: Wir schreiben für die komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$. Sei $f(z)$ die auf X definierte stetige zu approximierende Funktion. $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Wir werden f auf $\mathcal{E}$ genau durch eine rationale Funktion approximieren. Es gibt, wie man sich leicht überlegt (Anwendung des Satzes von Urysohn und Glättung, vgl. [Sch, p.22]), in der ganzen Ebene definierte, reelle, stetig differenzierbare Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ mit kompaktem Träger derart, daß für die Funktion

$$g(z) := u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\text{gilt: } \sup_{z \in X} |g(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Sei } h(z) := u_x(x,y) - v_y(x,y) + i(u_y(x,y) + v_x(x,y))$$

$$\text{und } \gamma := \sup_{z \in \mathcal{E}} |h(z)|.$$

Da X kompakt und vom Lebesgue-Maß null ist, gibt es eine kompakte Umgebung V von X , deren Rand $\mathcal{C}$ aus einer endlichen Anzahl paarweise punktfremder, stückweise glatter Jordan-Kurven besteht und deren Lebesgue-Maß kleiner als $\frac{\pi \varepsilon^2}{32 \gamma^2}$ ist.

Aus der Greenschen Integralformel folgt leicht

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \iint_V \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad \text{für } z \in \mathring{V}$$

Das erste Integral stellt eine in $\mathring{V} \supset X$ holomorphe Funktion

dar, es gibt daher nach dem Rungeschen Approximationssatz eine rationale Funktion $r(z)$ mit Polen außerhalb von X , so daß

$$\sup_{z \in X} \left| r(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Das Flächenintegral ist dem Betrag nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$. Um dies zu sehen, zerlegen wir den Integrationsbereich in zwei Teile, $|\zeta - z| \leq \frac{\varepsilon}{8\gamma}$ und $|\zeta - z| > \frac{\varepsilon}{8\gamma}$.

$$\left| \frac{1}{2\pi} \iint_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta - z| \leq \frac{\varepsilon}{8\gamma}} \frac{\gamma}{|\zeta - z|} d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta - z| > \frac{\varepsilon}{8\gamma}} \frac{8\gamma}{\varepsilon} d\xi d\eta < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}$$

Insgesamt haben wir $\sup_{z \in X} |r(z) - f(z)| < \varepsilon$. q.e.d.

Bemerkung: Ist X einfach zusammenhängend, so läßt sich die Approximation schon durch Polynome bewerkstelligen (Polverschiebung!)

Daraus können wir nun folgenden Satz ableiten (vgl. [HQ]):

Satz 13.5 Sei $(X, \mathcal{F})$ ein morph-separabler Raum, $\mathcal{F} = \overline{[g]}$ und $g(X)$ vom Lebesgue-Maß null für alle $g \in \mathcal{G}$. Dann ist $(X, \mathcal{F})$ dann und nur dann morph-vollständig, wenn $\mathcal{F} = \mathcal{C}(X)$.

Wegen Satz 6.2 ist dies mit folgendem Satz gleichbedeutend:

Satz 13.6 Sei X eine kompakte Menge im $\mathbb{C}^I$, $\text{pr}_i(X)$ vom Lebesgue-Maß null für alle $i \in I$. Dann kann dann und nur dann jede stetige Funktion auf X gleichmäßig durch Polynome approximiert werden, wenn X polynomkonvex ist.---

Als X ist z.B. eine Kurve der folgenden Gestalt zulässig: $z_i = f_i(t)$, $0 \leq t \leq 1$, wobei die f_i differenzierbare Funktionen sind.

Wir beweisen die Fassung 13.5: Wenn $\mathcal{F} = \mathcal{C}(X)$, so ist $(X, \mathcal{F})$ nach Corollar 6.7 morph-vollständig.

Sei nun $(X, \mathcal{F})$ morph-vollständig. Wir zeigen, daß $\mathcal{F}$ selbstadjungiert ist. Es genügt zu zeigen, daß aus $g \in \mathcal{G}$ folgt $g^* \in \mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ inversenabgeschlossen, ist

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{t_g} & \overline{\mathcal{R}_g \omega | g(X)} = \mathcal{C}(g(X)) \\ X & \xrightarrow{g} & g(X) \subset \mathbb{C} \end{array}$$

eine morphie Abbildung. z^* sei die Funktion, die jedem Punkt der komplexen Ebene den konjugiert-komplexen Wert zuordnet. $z^* | g(X) \in \mathcal{C}(g(X))$, d.f. $t_g(z^*) = z^* \circ g = g^* \in \mathcal{F}$. q.e.d.

Will man den Satz auf spezielle Fälle anwenden, so muß man z.B. über die polynomkonvexen Hüllen von Kurven Bescheid wissen. Die polynomkonvexen Hüllen von analytischen Kurven im $\mathbb{C}^n$ untersuchte J. Wermer in [W2].

§ 14. POLYNOMKONVEXE MENGEN. ŠILOVRAND.

14 a. Polynomkonvexe Mengen

Satz 14.1 Eine kompakte Teilmenge X der komplexen Ebene ist genau dann polynomkonvex, wenn X einfach zusammenhängt.

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung aus dem Rungeschen Approximationssatz.

Während also im $\mathbb{C}^1$ eine topologische Charakterisierung der polynomkonvexen Mengen möglich ist, ist dies im $\mathbb{C}^n$ für $n \geq 2$ nicht mehr der Fall. Wir geben als Beispiel zwei topologisch äquivalente Mengen im $\mathbb{C}^2$ an, von denen die eine polynomkonvex, die andere es nicht ist.

$$T_1 := \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \begin{array}{l} z_1 = e^{i\varphi} \\ z_2 = e^{-i\varphi} \end{array} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$$

$$T_2 := \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \begin{array}{l} z_1 = e^{i\varphi} \\ z_2 = e^{i\varphi} \end{array} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$$

T_1 ist polynomkonvex, denn es gilt

$$T_1 = \{ |z_1 z_2 - 1| = 0 \} \cap \{ |z_1| \leq 1 \} \cap \{ |z_2| \leq 1 \}.$$

Dagegen ist die polynomkonvexe Hülle von T_2 gleich

$$\begin{aligned} h_p(T_2) &= \{ |z_1 - z_2| = 0 \} \cap \{ |z_1| \leq 1 \} = \\ &= \{ (z_1, z_2) : z_1 = z_2 = re^{i\varphi}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \} \end{aligned}$$

wegen des Maximumprinzips auf der Fläche $z_1 = z_2$.

Man überlegt sich leicht, daß eine kompakte Teilmenge im $\mathbb{C}^n$ genau dann polynomkonvex ist, wenn sie konvex bezüglich den in ganz $\mathbb{C}^n$ holomorphen Funktionen ist.

Die Ungleichung

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_n y_n \leq \vartheta$$

ist gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\left| e^{\sum \gamma_\nu z_\nu} \right| \leq e^\vartheta$$

wobei $\gamma_\nu = \alpha_\nu - i\beta_\nu$ und $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$.

Daraus folgt, daß eine kompakte Menge im $\mathbb{C}^n$, die konvex im elementargeometrischen Sinn ist, auch polynomkonvex ist.

Um diesen Satz auf konvexe Mengen in einem $\mathbb{C}^I$ zu verallgemeinern, beweisen wir einen Hilfssatz, den wir auch später noch einmal brauchen werden.

Hilfssatz 14.2 Seien N_i , $i \in I$, topologische Räume, $\prod_{i \in I} N_i$

ihr Produkt. Für jede Teilmenge $J \subset I$ bezeichne pr_J die Projektion von $\prod_{i \in I} N_i$ auf $\prod_{i \in J} N_i$. Ist A eine abgeschlossene

Teilmenge von $\prod_{i \in I} N_i$, so gilt

$$(+)\quad A = \bigcap_{J \text{ endl.}} \text{pr}_J^{-1} \circ \text{pr}_J(A),$$

wobei der Durchschnitt über alle endlichen Teilmengen J von I zu nehmen ist.---

Beweis: Daß A in dem Durchschnitt enthalten ist, ist klar.

Sei nun x ein Punkt von $\prod_{i \in I} N_i$, der nicht zu A gehört. Da A abgeschlossen ist, gibt es noch eine ganze Umgebung von x , die nicht zu A gehört und die wir in der Gestalt $\prod_{i \in I} U_i$ annehmen können, wobei für fast alle i , etwa alle bis auf die endliche Menge $J < I$, gilt $U_i = N_i$. Dann ist $x \notin \bar{\text{pr}}_J^1 \cdot \text{pr}_J(A)$. q.e.d.

Bemerkung: Tragen alle N_i die diskrete Topologie, so ist die Abgeschlossenheit von A für das Bestehen von (+) notwendig und hinreichend.

Satz 14.3 Eine kompakte konvexe Menge in einem $\mathbb{C}^I$ ist polynomkonvex.---

Beweis: Für jedes endliche $J < I$ ist $\text{pr}_J(X)$ kompakt und konvex in $\mathbb{C}^J$, also polynomkonvex. Dann ist auch $\bar{\text{pr}}_J^1 \cdot \text{pr}_J(X) = \text{pr}_J(X) \times \mathbb{C}^{I-J}$ polynomkonvex in $\mathbb{C}^I$ und ebenso der Durchschnitt $\bigcap_{J \text{ endl.}} \bar{\text{pr}}_J^1 \cdot \text{pr}_J(X) = X$. q.e.d.

14 b. Šilovrand

Satz 14.4 Sei X ein kompakter Teil der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ die Algebra derjenigen stetigen Funktionen auf X , die im Innern von X holomorph sind. Dann ist der Träger des Šilovrands von $(X, \mathcal{F})$ gleich dem topologischen Rand von X . ---

Beweis: Aus dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen folgt, daß der Šilovrand im topologischen Rand enthalten ist. Sei nun z_0 ein Punkt des topologischen Randes. Wir zeigen, daß z_0 zum Šilovrand gehört. Dazu verwenden wir

das Kriterium in Satz 8.3. Sei $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ eine gegen z_0 konvergierende Folge von Punkten, die nicht in X liegen. Man bilde die Folge der Funktionen $\frac{1}{z - \zeta_v}|_X$. Für eine beliebige Umgebung U von z_0 hat mindestens eine dieser Funktionen die Eigenschaft, in $X \cap U$ das Maximum ihres Betrages anzunehmen und in $X \cap U$ einen Betrag kleiner als dieses Maximum zu haben. q.e.d.

Bemerkung: Der Satz gilt auch für den Fall, daß man statt der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ eine nichtkompakte Riemannsche Fläche R zugrunde legt, da nach Behnke-Stein [BS] eine Funktion $A(z, \zeta)$ existiert, die in $R_z \times R_\zeta$ meromorph (und eindeutig) ist, und die für festes ζ in z für $z \neq \zeta$ holomorph ist und bei $z = \zeta$ einen Pol erster Ordnung hat.

Während also im Eindimensionalen eine topologische Charakterisierung des Šilovrandes möglich ist, ist dies im Mehrdimensionalen nicht mehr der Fall, wie aus den folgenden Beispielen hervorgeht.

1) Wir betrachten den Einheitspolyzyylinder E^n im $\mathbb{C}^n$ und die Algebra $\mathcal{H}(E)^n = \overline{\mathcal{P}}|_{E^n}$ derjenigen stetigen Funktionen auf E^n , die im Innern von E^n holomorph sind. Nach Satz 11.5 ist der Šilovrand von $E^n = (E^n, \mathcal{H}(E)^n)$ gleich dem Produkt der Šilovränder der Faktoren $(E, \mathcal{H}(E))$, sein Träger also gleich der Menge $\{|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1\}$, was für $n > 1$ nur ein Teil des topologischen Randes von E^n ist.

2) Sei $K_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \leq 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{H}(K_n) = \overline{\mathcal{P}}|_{K_n}$ die Algebra derjenigen stetigen Funktionen auf K_n , die im Innern holomorph sind. Der Trä-

ger des Šilovrandes von $K_n = (K_n, \mathcal{H}(K_n))$ ist gleich dem topologischen Rand der Einheitskugel, also gleich der Menge $\{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\}$. Sei nämlich $z^{(0)}$ ein Randpunkt. Nach einer Drehung hat er die neuen Koordinaten $z'_1 = 1$, $z'_2 = \dots = z'_n = 0$. Die morph. Funktion $1+z'_1|_{K_n}$ nimmt genau in $z^{(0)}$ ihr Maximum an, d.h. $z^{(0)}$ gehört zum Šilovrand. Eine Integralformel für diesen Šilovrand findet sich bei E.Martinelli [Ma].

K_n ist ebenso wie $\mathbb{E}^n$ morph.-vollständig, da K_n konvex ist. K_n ist homöomorph $\mathbb{E}^n$. Aber natürlich ist eine bimorphe Abbildung von K_n auf $\mathbb{E}^n$ für $n > 1$ nicht möglich, da dabei der Šilovrand in den Šilovrand übergehen müsste, was hier schon aus topologischen Gründen unmöglich ist.

Wir wollen noch das Beispiel eines morph.-vollständigen Raums angeben, dessen Strukturalgebra nicht aus allen stetigen Funktionen besteht, und dessen Šilovrand doch gleich dem ganzen Raum ist.

Sei I eine nicht endliche Indexmenge, K_I die Einheitskugel im $\mathbb{C}^I$:

$$K_I = \left\{ z \in \mathbb{C}^I : \sum_{i \in I} |z_i|^2 \leq 1 \right\}$$

und $\mathcal{K}_I = (K_I, \overline{\mathcal{P}K_I})$. K_I ist morph.-vollständig, da K_I konvex (und kompakt) ist. $\overline{\mathcal{P}K_I}$ besteht nicht aus allen stetigen Funktionen, denn beschränkt auf die Hyperebene $z_{i_0} = 0$ für $i \neq i_0$ sind es holomorphe Funktionen in z_{i_0} . Die Punkte der speziellen Gestalt $(z_{i_1}, \dots, z_{i_n}, 0, 0, \dots)$, $\sum_{v=1}^n |z_{i_v}|^2 = 1$, liegen dicht in K_I . Jeder solche Punkt gehört zum Šilovrand, wie aus der obigen Betrachtung von K_n folgt. Da der Träger des Šilovrandes aber abgeschlos-

sen ist, umfaßt er ganz K_I .

Ein ähnliches, etwas komplizierteres Beispiel findet sich in [GRS].

§ 15. HILFSMITTEL AUS DER FUNKTIONENTHEORIE

In diesem Paragraphen stellen wir einige Definitionen und Sätze aus der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen zusammen, die wir brauchen.

Unter einem komplexen Raum verstehen wir immer einen komplexen Raum im Sinne von J.P.Serre (vgl. [GR1] und [GR2]). Die Definition ist nicht kurz; man kann sie etwa in der folgenden Form geben.

Definition 15.1

- a) Ein komplexer Raum X ist ein Hausdorffscher Raum bei dem für jede offene Teilmenge $U \subset X$ ein Ring $\mathcal{O}(U)$ von auf U stetigen Funktionen, den dort holomorphen Funktionen, ausgezeichnet ist, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:
- 1) Ist $V \subset U$ und $f \in \mathcal{O}(U)$, so gilt $f|_V \in \mathcal{O}(V)$.
 - 2) Ist $V = \bigcup_{i \in I} U_i$ und gilt für eine stetige Funktion f auf V $f|_{U_i} \in \mathcal{O}(U_i)$ für alle $i \in I$, so ist $f \in \mathcal{O}(V)$.
 - 3) Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung U , die man biholomorph auf eine lokal-analytische Teilmenge eines $\mathbb{C}^k$ abbilden kann.
- b) Der $\mathbb{C}^n$ ist ein komplexer Raum. Die holomorphen Funktionen auf den offenen Teilmengen seien wie üblich definiert.
- c) Jede offene Teilmenge U eines komplexen Raumes X werde

als komplexer Raum aufgefaßt, indem man für jede offene Teilmenge $V \subset U$ diejenigen Funktionen als holomorph auszeichnet, die auf V als offener Teilmenge von X bereits ausgezeichnet sind.

d) Eine Teilmenge M eines komplexen Raumes X heißt lokal-analytisch, wenn zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U existiert, so daß $M \cap U$ das genaue Nullstellengebilde einer Menge in U holomorpher Funktionen ist. Eine lokal-analytische Teilmenge von X heißt analytisch, wenn sie abgeschlossen in X ist. (Zu jeder lokal-analytischen Menge gibt es eine sie umfassende offene Menge, in der sie analytisch ist).

Jede lokal-analytische Teilmenge M eines komplexen Raumes X werde als komplexer Raum aufgefaßt, und zwar heiße eine Funktion f in einer offenen Teilmenge V von M holomorph, wenn es zu jedem Punkt $x \in V$ eine offene Teilmenge U von X gibt, die x enthält, und eine holomorphe Funktion f_1 in U , so daß $f|_{V \cap U} = f_1|_{V \cap U}$.

e) Eine stetige Abbildung ϕ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y heißt holomorph, wenn für jede offene Teilmenge V von Y und jede in V holomorphe Funktion g die Funktion $g \cdot \phi$ in $\phi^{-1}(V)$ holomorph ist. ϕ heißt biholomorph, wenn es eine topologische Abbildung ist und ϕ sowie ϕ^{-1} holomorph sind.---

Bemerkung: Die Punkte b) bis e) dienen zur Erläuterung von a3). Bei den in b), c), d) definierten komplexen Räumen hat man sich zu überzeugen, daß die Eigenschaft a3) erfüllt ist.

Aus a1) und a2) folgt, daß man die holomorphen Funktionen nur in der Umgebung jedes Punktes kennen zu braucht, um sie in jeder offenen Menge zu kennen.

Sei x ein Punkt eines komplexen Raums X . Wir betrachten die Familie der Ringe $\{\mathcal{O}(U), U \text{ offen mit } x \in U\}$. Für $V \subset U$ gibt es den Beschränkungshomomorphismus

$\rho_{VU}: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$. Es gilt $\rho_{UU} = \text{id.}$ und für $W \subset V \subset U$ $\rho_{WU} = \rho_{WV} \circ \rho_{VU}$. Wir können deshalb den induktiven Limes der Ringe $\mathcal{O}(U)$ bilden und erhalten den Ring $\mathcal{O}_x$ der Keime der holomorphen Funktionen im Punkte x .

Ist $\mathcal{O}_x$ in jedem Punkt $x \in X$ nullteilerfrei, so heißt der komplexe Raum lokal-irreduzibel. Ist $\mathcal{O}_x$ zusätzlich in jedem Punkt ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper, so heißt der komplexe Raum normal.

Besitzt jeder Punkt eines komplexen Raumes eine offene Umgebung, die auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ biholomorph abgebildet werden kann, so heißt der Raum eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

Das Produkt lokal-analytischer Mengen M_i im $\mathbb{C}^{n_i}$ ($i=1, \dots, m$) ist eine lokal-analytische Menge im $\mathbb{C}^{\sum n_i}$. Da ein komplexer Raum im kleinen eine lokal-analytische Menge in einem $\mathbb{C}^k$ ist, kann man in natürlicher Weise das Produkt komplexer Räume definieren.

Definition 15.2 Sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{O}$ der Ring der auf ganz X holomorphen Funktionen.

1) X heißt holomorph-separabel, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}$ exi-

stiert mit $f(x) \neq f(y)$.

2) X heißt holomorph-konvex, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ die Menge

$$h_{\mathcal{O}}(K) = \bigcap_{f \in \mathcal{O}} \left\{ x \in X : |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \right\}$$

ebenfalls kompakt ist.

3) X heißt holomorph-vollständig, wenn X holomorph-separabel und holomorph-konvex ist.

Eine holomorph-vollständige komplexe Mannigfaltigkeit heißt Steinsche Mannigfaltigkeit.---

Diese Definition der holomorph-vollständigen komplexen Räume ist nicht zur Definition 4.7 analog, jedoch haben R. Remmert und R. Iwahashi (siehe [R1] und [I]) bewiesen, daß ein komplexer Raum genau dann holomorph-vollständig ist, wenn die Abbildung $x \rightarrow \varphi_x$ der Punkte von X in die Menge der Homomorphismen der Algebra $\mathcal{O}$ auf den Körper $\mathbb{C}$ bijektiv und topologisch ist. Diese Tatsache ist für manche Betrachtungen in der Funktionentheorie sehr nützlich, vgl. [K2].

Der $\mathbb{C}^n$, das Innere von Polyzylindern und Polynompolyedern im $\mathbb{C}^n$ (Definition in Satz 15.5) sind, wie man leicht nachprüft, holomorph-vollständig. Jede nicht-kompakte (eindimensionale) Riemannsche Fläche ist, wie aus einer Arbeit von H. Behnke und K. Stein [BS] folgt, holomorph-vollständig.

Die holomorph-vollständigen Räume haben folgende Eigenschaft. (Vgl. [G]. Dort werden allerdings nur normale komplexe Räume betrachtet).

Satz 15.3 Sei Y eine relativ-kompakte^{offene} Teilmenge des holomorph-vollständigen Raumes X . Dann gibt es endlich viele auf X holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_k$, so daß $f_1 \times \dots \times f_k$ eine biholomorphe Abbildung von Y auf eine lokal-analytische Teilmenge des $\mathbb{C}^k$ vermittelt.---

Satz 15.4 Sei X ein holomorph-vollständiger Raum, M eine analytische Teilmenge von X . Dann gilt:

- a) M ist das genaue Nullstellengebilde einer Menge in X holomorpher Funktionen.
- b) Zu jeder auf M holomorphen Funktion f (Definition 15.1d) gibt es eine in X holomorphe Funktion f_1 , so daß $f = f_1|_M$.---

Wir werden den Satz nur für den Fall brauchen, wo X das Innere eines Polyzylinders oder Polynompolyeders im $\mathbb{C}^n$ ist.

Der Satz ist ein Spezialfall von Theorem A und B (vgl. [C1] und [C2]).

Der folgende Approximationssatz stammt von A.Weil [W1].

Satz 15.5 Sei P ein Polynompolyeder im $\mathbb{C}^N$, d.h. eine kompakte Menge, die sich darstellen läßt in der Form

$$P = U \cap \bigcap_{\lambda=1}^L \{ x \in \mathbb{C}^N : |p_\lambda(x)| \leq 1 \} ,$$

wobei U eine offene Menge im $\mathbb{C}^N$ und $p_1, \dots, p_L$ Polynome sind. Dann kann jede in einer Umgebung von P holomorphe Funktion gleichmäßig auf P durch Polynome approximiert werden.---

R.Remmert [R2] bewies den folgenden Satz.

Satz 15.6 Seien X und Y komplexe Räume, $\phi : X \rightarrow Y$ eine eigentliche, holomorphe Abbildung. (Eigentlich heißt: Das Urbild jeder kompakten Menge ist kompakt). Dann ist $\phi(X)$ eine analytische Teilmenge von Y .---

In der Algebra $\mathcal{O}$ der auf einem komplexen Raum X holomorphen Funktionen kann man die Topologie der kompakten Konvergenz einführen. Eine Umgebungsbasis einer Funktion $f \in \mathcal{O}$ bilden die Mengen

$$V(f, K, \varepsilon) = \left\{ g \in \mathcal{O} : \sup_{x \in K} |g(x) - f(x)| < \varepsilon \right\},$$

wobei K die kompakten Teilmengen von X , ε die reellen Zahlen > 0 durchläuft.

Es gilt [GR2] :

Satz 15.7 Die Algebra $\mathcal{O}$ der auf einem komplexen Raum X holomorphen Funktionen ist in der Topologie der kompakten Konvergenz vollständig.---

15.8 Wir werden, falls K eine kompakte Teilmenge eines komplexen Raumes X ist, folgende Bezeichnungsweise einführen: $\mathcal{H}(K)$ ist die Banachalgebra derjenigen stetigen Funktionen auf K , die durch Funktionen, die in einer Umgebung von K holomorph sind, gleichmäßig approximiert werden können. Es ist also $\mathcal{H}(K) = \overline{\bigcup_{U \supset K} \mathcal{O}(U)}$, wobei die Vereinigung über alle offenen Mengen U , die K umfassen, zu nehmen ist. Nach dem vorigen Satz ist jede Funktion $f \in \mathcal{H}(K)$ im Innern von K holomorph.

Wo wir bisher die Bezeichnung $\mathcal{H}(K)$ verwendeten, steht sie mit dieser Festsetzung im Einklang.

§ 16. HOLOMORPHE FUNKTIONEN VON MORPHEN FUNKTIONEN

Satz 16.1 Die Strukturalgebra eines morph-konvexen Raums $(X, \mathcal{F})$ ist abgeschlossen gegenüber Anwendung holomorpher Funktionen im folgenden Sinn: Ist $f \in \mathcal{F}$ und h eine holomorphe Funktion in einer offenen Menge der komplexen Ebene, die $f(X) =: Y$ umfaßt, so ist auch $h \circ f \in \mathcal{F}$.---

Beweis: Da $\mathcal{F}$ inversenabgeschlossen, ist

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xleftarrow{^t f} & \overline{\mathcal{R}_Y | Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \subset \mathbb{C} \end{array}$$

eine morphie Abbildung. Nach dem Satz von Runge ist

$h|_{Y \in \overline{\mathcal{R}_Y | Y}}$, also $^t f(h|_Y) = h \circ f \in \mathcal{F}$.

Es gilt folgende Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche:

Theorem 16.2

Sei $(X, \mathcal{F})$ ein morph-konvexer Raum und $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$.

$(\bigtimes_{v=1}^n f_v)(X) =: Y$ sei in einer lokal-analytischen Menge M des $\mathbb{C}^n$ enthalten. h sei eine holomorphe Funktion auf M (Definition 15.1 d). Dann ist $h \circ (\bigtimes f_v) \in \mathcal{F}$.---

Für den Fall, daß M eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist, (eine offene Menge ist eine spezielle lokal-analytische Menge), und $\mathcal{F}$ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, wurde der Satz von Šilov [Ši] bewiesen. Arens und Calderón [AC] konnten sich dann von der Endlichkeitsbedingung freimachen.

Beweis:

Wir haben unseren Satz bewiesen, wenn wir Funktionen $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{F}$ und ein Polynompolyeder P im $\mathbb{C}^{n+k}$ mit folgenden

Eigenschaften finden können:

Sei $\left(\left(\bigotimes_{\nu=1}^n f_{\nu}\right) \times \left(\bigotimes_{\kappa=1}^k g_{\kappa}\right)\right)(X) =: Z \subset \mathbb{C}^{n+k}$.

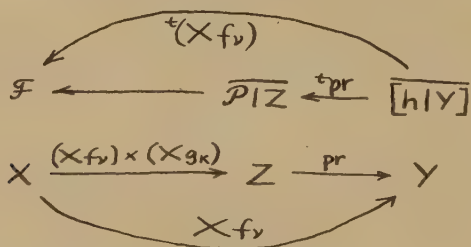
$\text{pr} : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^n$ sei die Projektion längs der letzten k Koordinaten.

W sei eine offene Menge des $\mathbb{C}^n$, in der die Menge M analytisch ist.

Dann gelte $Z \subset \hat{P} \subset \bar{\text{pr}}^1(W) = W \times \mathbb{C}^k$.

Wenn diese Situation vorliegt, ist $\bar{\text{pr}}^1(M) \cap \hat{P} =: N$ eine analytische Menge in $\hat{P}$, die Z umfaßt. ${}^t\text{pr}(h)|_N$ ist eine holomorphe Funktion auf N . Es gibt eine holomorphe Funktion h_1 in $\hat{P}$, die auf N beschränkt mit ${}^t\text{pr}(h)$ übereinstimmt. (Satz 15.4 b). Wir verkleinern P zu einem Polynompolyeder P_1 , so daß $Z \subset P_1 \subset \hat{P}$. Auf P_1 nun kann man h_1 durch Polynome gleichmäßig approximieren (Satz 15.5), also auch ${}^t\text{pr}(h)$ auf Z .

Deshalb sind im folgenden Diagramm alle Abbildungen morph.



Daher gilt ${}^t(\bigotimes f_{\nu})(h(Y)) = h \circ (\bigotimes f_{\nu}) \in \mathcal{F}$.

Wir konstruieren jetzt die Funktionen $g_1, \dots, g_k$ und das Polynompolyeder P .

Sei $\mathcal{G}$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}$ mit der Eigenschaft

$$(+)\quad \|g\| < 1 \quad \text{für alle } g \in \mathcal{G}$$

und $[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n, \mathcal{G}] = \mathcal{F}$.

Wir bilden die Abbildung

$$\phi = (\bigtimes_{\nu=1}^n f_{\nu}) \times (\bigtimes_{g \in \mathcal{G}} g) : X \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}}$$

$\phi(X) =: \tilde{X}$ ist nach Satz 6.3 polynomkonvex.

Sei $\text{pr}_1 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{C}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten. Es ist

$$\text{pr}_1(\tilde{X}) = \text{pr}_1 \circ \phi(X) = (\bigtimes_{\nu=1}^n f_{\nu})(X) = Y \subset W$$

Sei nun U eine relativ-kompakte offene Umgebung von Y , so daß $\bar{U} \subset W$. $R := \bar{U} \cap U$ sei der Rand von U , $E := \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Es gilt dann

$$\tilde{X} \subset U \times E^{\mathcal{G}} \subset U \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}}$$

$\tilde{R} := R \times E^{\mathcal{G}}$ ist kompakt. Zu jedem Punkt $x \in \tilde{R}$ gibt es ein Polynom $\tilde{p}_x$ in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}}$ und eine Umgebung $V(x)$, so daß

$$(++)\quad \inf_{x' \in V(x)} |\tilde{p}_x(x')| > 1 > \sup_{x' \in \tilde{X}} |\tilde{p}_x(x')|$$

Es genügen endlich viele der $V(x)$, um R zu überdecken.

Die zugehörigen Polynome seien $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_m$. Es gilt

$$\tilde{X} \subset \tilde{P} := U \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}} \cap \bigcap_{\mu=1}^m \{x : |\tilde{p}_{\mu}(x)| \leq 1\} \cap \mathbb{C}^n \times E^{\mathcal{G}}$$

$\tilde{P}$ ist kompakt, da auch gilt $\tilde{P} = \bar{U} \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}} \cap \{\dots\} \cap \mathbb{C}^n \times E^{\mathcal{G}}$, also $\tilde{P}$ abgeschlossener Teil der kompakten Menge $\bar{U} \times E^{\mathcal{G}}$ ist.

Da in den Polynomen $\tilde{p}_{\mu}$ nur endlich viele Koordinaten vorkommen, gibt es endlich viele Funktionen $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{G}$ und eine abgeschlossene Menge $Q \subset \mathbb{C}^{n+k}$, so daß

$$\bigcap_{\mu=1}^m \{x : |\tilde{p}_{\mu}(x)| \leq 1\} = Q \times \mathbb{C}^{\mathcal{G} - U\{g_k\}}$$

Sei jetzt $\text{pr}_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{C}^{n+k}$ die Projektion längs $\mathbb{C}^{\mathcal{G} - U\{g_k\}}$.

$$\text{pr}_2(\tilde{X}) = \text{pr}_2 \circ \phi(X) = ((\bigtimes f_{\nu}) \times (\bigtimes g_{\kappa}))(X) =: Z \subset \mathbb{C}^{n+k}$$

Seien p_μ die Polynome, für die gilt $\tilde{p}_\mu = p_\mu \circ \text{pr}_2$ und $\{z_\lambda, \lambda=1, \dots, n+k\}$ die Koordinatenfunktionen in $\mathbb{C}^{n+k}$.

Dann ist

$$Q = \bigcap_{\mu=1}^m \{z : |p_\mu(z)| \leq 1\}$$

$$\mathbb{C}^{n \times k} = \bigcap_{\lambda=n+1}^{n+k} \{z : |z_\lambda(z)| \leq 1\},$$

also $\text{pr}_2(\tilde{P}) =: P = U \times \mathbb{C}^k \cap Q \cap \mathbb{C}^{n \times k}$ ein Polynompolyeder, das $Z = \text{pr}_2(\tilde{X})$ umfaßt (da $\tilde{X} \subset \tilde{P}$). Wegen (+) und (++) gilt sogar $Z \subset \mathring{P}$. Nach Konstruktion ist ferner $\mathring{P} \subset W \times \mathbb{C}^k$, also genau wie wir es brauchten.

Damit ist der Beweis erbracht.

Daraus folgt unmittelbar

Corollar 16.3 Sei X ein kompakter Teil einer lokal-analytischen Menge M des $\mathbb{C}^n$. $(X, \mathcal{F})$ sei morph-konvex und die Koordinatenfunktionen $z_1, \dots, z_n$ des $\mathbb{C}^n$, beschränkt auf X , seien in $\mathcal{F}$ enthalten. Dann ist $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{F}$.---
Dabei ist $\mathcal{H}(X)$ die in 15.8 definierte Algebra von Funktionen, wobei die lokal-analytische Menge M als komplexer Raum betrachtet ist.

Man beachte, daß nicht notwendig alle Funktionen aus $\mathcal{H}(X)$ durch Polynome approximiert werden können. (Sei etwa $M = \mathbb{C}$ und $X = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$). Dies ist nur lokal möglich. Das gibt Anlaß zu folgender Vermutung:

--- Sei $(X, \mathcal{F})$ morph-konvex und f eine stetige Funktion auf X , die lokal durch Funktionen aus $\mathcal{F}$ gleichmäßig approximiert werden kann, d.h. jeder Punkt $x \in X$ besitze eine kompakte Umgebung V mit $f|_V \in \overline{\mathcal{F}|_V}$. Dann ist f selbst in $\mathcal{F}$ enthalten.---

Die Vermutung ist in folgendem Spezialfall richtig:

Sei X eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{C}^I$. $\text{pr}_i(X)$ sei vom Lebesgue-Maß null für alle $i \in I$, und jeder Punkt $x \in X$ besitze eine Umgebung U in X , so daß $\text{pr}_i(U)$ für alle i einfach zusammenhängt. Man betrachte den algebrierten Raum $(X, \overline{\mathcal{P}|X})$. Lokal lassen sich alle stetigen Funktionen durch morphische Funktionen gleichmäßig approximieren. Es gilt $\mathcal{C}(X) = \overline{\mathcal{P}|X}$ genau dann, wenn $(X, \overline{\mathcal{P}|X})$ morphisch-konvex ist. (Zum Beweis siehe Satz 13.4 - 13.6).

Aus Corollar 16.3 kann man folgenden Satz ableiten:

Satz 16.4 Sei X_1 kompakter Teil einer lokal-analytischen Menge des $\mathbb{C}^{m_i} (i=1, \dots, n)$. $\prod X_1$ ist dann kompakter Teil einer lokal-analytischen Menge in $\mathbb{C}^{\sum m_i}$. $(X_1, \mathcal{K}(X_1))$ sei jeweils morphisch-vollständig. Dann gilt

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{K}(X_1) = \mathcal{K}\left(\prod_{i=1}^n X_1\right) \quad \text{---}$$

Beweis: Die Inklusion $\bigotimes \mathcal{K}(X_1) \subset \mathcal{K}(\prod X_1)$ ist trivial.

Zur Umkehrung: $(\prod X_1, \bigotimes \mathcal{K}(X_1))$ ist morphisch-vollständig, da alle $(X_1, \mathcal{K}(X_1))$ es sind. $\bigotimes \mathcal{K}(X_1)$ enthält die Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^{\sum m_i}$. Daraus folgt die Behauptung.

Man beachte die äußere Ähnlichkeit dieses Beweises mit dem Beweis von Corollar 13.3.

Bemerkung: Wegen Satz 15.3 können die X_1 auch als kompakte Teile holomorph-vollständiger Räume (statt lokal-analytischer Mengen im $\mathbb{C}^{m_i}$) vorausgesetzt werden.

Nun werden wir noch den benötigten Hilfssatz zu Satz 11.3 beweisen.

Hilfssatz 16.5 $(X, \mathcal{F})$ sei ein morphisch-vollständiger Raum. X_1 und X_2 seien punktfremde, nichtleere, abgeschlossene

Teilmengen von X mit $X = X_1 \cup X_2$. Dann gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{F}$ mit $g|_{X_1} = 1$ und $g|_{X_2} = 0$.---

Beweis (nach [AC]): g ist eine auf X stetige Funktion.

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß (13.2) gilt $\mathcal{C}(X) = [\mathcal{F}, \mathcal{F}^*]$ ($\mathcal{F}^*$ sind die zu $\mathcal{F}$ konjugiert-komplexen Funktionen). Daher gibt es Funktionen $f_1, \dots, f_{2m} \in \mathcal{F}$ mit

$$\|g - f_1 f_{m+1}^* - \dots - f_m f_{2m}^*\| < \frac{1}{2}$$

$\sum_{\mu=1}^{2m} f_{\mu}$ liefert eine Abbildung von X in den $\mathbb{C}^{2m}$, die X_1 und X_2 in zwei punktfremde kompakte Mengen Y_1 und Y_2 überführt. Es gibt punktfremde offene Umgebungen U_1 und U_2 von Y_1 bzw. Y_2 . Die Funktion h mit $h|_{U_1} = 1$ und $h|_{U_2} = 0$ ist in $U_1 \cup U_2$ holomorph. Deshalb gilt nach Theorem 16.2 $h \cdot (\sum f_{\mu}) = g \in \mathcal{F}$.
q.e.d.

§ 17. MORPH-VOLLSTÄNDIGE RÄUME IN DER FUNKTIONENTHEORIE

In diesem Paragraphen werden wir Beispiele aus der Funktionentheorie für morph-vollständige Räume angeben. Sie hängen eng mit den Holomorph-vollständigen Räumen zusammen.

Der erste Satz wird sich später als Spezialfall wieder ergeben. Wir bringen ihn aber, da sein Beweis ziemlich elementar ist.

Satz 17.1 Sei X eine kompakte Teilmenge der komplexen Ebene. Dann ist $(X, \mathcal{H}(X))$ morph-vollständig.---

(Definition von $\mathcal{H}(X)$ in 15.8)

Beweis: z sei die Koordinatenfunktion der komplexen Ebene.

$$f_{\infty} := z|_X$$

$$f_{\alpha} := \frac{1}{z-\alpha}|_X \quad \text{für } \alpha \notin X$$

Es gilt nach dem Satz von Runge

$$\mathcal{H}(X) = \overline{[f_\infty, \{f_\alpha, \alpha \notin X\}]}$$

Sei $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{H}(X))$ und $\varphi(f_\infty) =: \zeta$.

Behauptung: $\zeta \in X$. Annahme: $\zeta \notin X$

$$(f_\infty - \zeta)f_\zeta = 1 \quad \text{darauf } \varphi \text{ angewandt}$$

$$0 = 1 \quad \text{Widerspruch!}$$

Behauptung: Für alle $\alpha \notin X$ gilt $\varphi(f_\alpha) = f_\alpha(\zeta)$

Beweis: $(f_\infty - \alpha)f_\alpha = 1$ darauf φ angewandt

$$(\zeta - \alpha)\varphi(f_\alpha) = 1, \text{ d.f. } \varphi(f_\alpha) = \frac{1}{\zeta - \alpha} = f_\alpha(\zeta).$$

Es folgt, daß für alle $f \in \mathcal{H}(X)$ gilt $\varphi(f) = f(\zeta)$.

q.e.d.

Jetzt wenden wir uns mehrdimensionalen komplexen Räumen zu.

Theorem 17.2

Sei R ein komplexer Raum, $\mathcal{O}$ die Algebra der auf ihm holomorphen Funktionen. X sei eine kompakte Teilmenge von R mit der Eigenschaft $X = \mathcal{H}_\mathcal{O}(X)$. Dann ist der algebrierte Raum $(X, \overline{\mathcal{O}|X})$ morph-konvex.---

Beweis:

Sei U eine relativ-kompakte offene Umgebung von X und $Rd\ U$ ihr Rand. Wegen $X = \mathcal{H}_\mathcal{O}(X)$ gibt es zu jedem Punkt $y \in Rd\ U$ eine Funktion $f_y \in \mathcal{O}$, so daß $|f_y(y)| > 2$ und $\|f_y|_X\| \leq 1$ ist. Es gilt sogar für eine Umgebung V_y von y $\inf_{z \in V_y} |f_y(z)| > 2$. Da $Rd\ U$ kompakt ist, gibt es endlich viele dieser Funktionen, etwa $f_1, \dots, f_k$, so daß

$$P'_\varphi := \bigcap_{k=1}^k \{y \in R : |f_k(y)| \leq \varphi\} \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq 2$$

keinen Punkt mit $Rd\ U$ gemein hat, also $P_\varphi := P'_\varphi \cap U$ kompakt ist. Wir zeigen, daß $(P_1, \overline{\mathcal{O}|P_1})$ morph-konvex ist.

Da $X \subset P_1$ und $X = \bigcap_{h \in \overline{\mathcal{O}P_1}} \{y \in P_1 : |h(y)| \leq \sup_{x \in X} |h(x)|\}$, ist dann auch $(X, \overline{\mathcal{O}X})$ morph-konvex (Satz 10.1).

Sei $\mathcal{G}$ eine Teilmenge von $\mathcal{O}$ mit der Eigenschaft

$$\|g\|_{P_2} < 2 \quad \text{und} \quad \|g\|_{P_1} < 1 \quad \text{für alle } g \in \mathcal{G}$$

$$\text{und} \quad \overline{[f_1, \dots, f_k, \mathcal{G}|_{P_1}]} = \overline{\mathcal{O}P_1}.$$

Mittels der Abbildung $\phi = \bigtimes_{\kappa=1}^k f_{\kappa} \times \bigtimes_{g \in \mathcal{G}} g$ bilden wir $\tilde{P}_2 = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} P_g$ in den $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}}$ ab. $\phi(P_1) =: Q_1$ ist kompakt und im Einheitspolyzylinder $E^k \times E^{\mathcal{G}}$ enthalten ($E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$). $(Q_1, \overline{\mathcal{P}Q_1})$ ist der $(P_1, \overline{\mathcal{O}P_1})$ zugeordnete morph-separable Raum (vgl. Satz 5.6). Wir haben also zu zeigen, daß $(Q_1, \overline{\mathcal{P}Q_1})$ morph-vollständig ist. Dies tun wir, indem wir beweisen, daß Q_1 eine lytische Teilmenge in $E^k \otimes E^{\mathcal{G}} = (E^k \times E^{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{P}|_{E^k \times E^{\mathcal{G}}}})$ ist.

Sei $\mathcal{G}_1$ eine beliebige endliche Teilmenge von $\mathcal{G}$ und $\text{pr}_{\mathcal{G}_1}$ die Projektion von $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}}$ auf $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{\mathcal{G}_1}$.

$$\psi = \text{pr}_{\mathcal{G}_1} \circ \phi = \left(\bigtimes_{\kappa=1}^k f_{\kappa} \right) \times \left(\bigtimes_{g \in \mathcal{G}_1} g \right)$$

liefert dann eine eigentliche holomorphe Abbildung von $\tilde{P}_2$ in $\mathring{E}_2^k \times \mathring{E}_2^{\mathcal{G}_1}$ ($E_g = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq g\}$). Die Eigentlichkeit folgt daraus, daß jede kompakte Menge in $\mathring{E}_2^k \times \mathring{E}_2^{\mathcal{G}_1}$ in einem $E_g^k \times E_g^{\mathcal{G}_1}$ mit $g < 2$ enthalten ist und das Urbild davon, nämlich P_g , kompakt in $\tilde{P}_2$ ist. Infolgedessen (Satz 15.6) ist $\text{pr}_{\mathcal{G}_1} \circ \phi(\tilde{P}_2)$ eine analytische Menge in $\mathring{E}_2^k \times \mathring{E}_2^{\mathcal{G}_1}$ und kann deshalb (Satz 15.4) durch das Nullsetzen von dort holomorphen Funktionen beschrieben werden. Auf $E^k \times E^{\mathcal{G}_1}$ können diese holomorphen Funktionen gleichmäßig durch Polynome approximiert werden, also ist $\text{pr}_{\mathcal{G}_1} \circ \phi(\tilde{P}_2) \cap (E^k \times E^{\mathcal{G}_1}) = \text{pr}_{\mathcal{G}_1}(Q_1)$ eine lytische Teilmenge in $E^k \otimes E^{\mathcal{G}_1}$ und $(\overline{\mathcal{P}}_{\mathcal{G}_1}^1 \circ \text{pr}_{\mathcal{G}_1}(Q_1)) \cap (E^k \times E^{\mathcal{G}})$

eine lytische Teilmenge in $E^k \otimes E^{\mathcal{F}}$, also auch der Durchschnitt über alle endlichen Teilmengen $\mathcal{G}_1$ von $\mathcal{G}$. Dieser Durchschnitt ist nach Hilfssatz 14.2 gleich Q_1 . q.e.d.

Die Aussage des Satzes ist bemerkenswert, da eine analoge Aussage für algebrierte Räume nicht gilt: Sei $(X, \mathcal{F})$ ein algebrierter Raum. X selbst ist eine kompakte Teilmenge von X mit $X = \mathcal{K}_{\mathcal{F}}(X)$. Aber $(X, \overline{\mathcal{F}|X}) = (X, \mathcal{F})$ ist nicht notwendig morph-konvex. Vgl. aber Satz 10.1!

Theorem 17.2 ist auch im Hinblick auf den folgenden Satz bedeutsam.

Satz 17.3 Sei R ein lokal-kompakter Raum, $\mathcal{F}$ eine Algebra stetiger Funktionen auf R , die in der Topologie der kompakten Konvergenz vollständig ist. Es gelte:

- 1) Für jede kompakte Teilmenge $X \subset R$ mit $X = \mathcal{K}_{\mathcal{F}}(X)$ ist $(X, \overline{\mathcal{F}|X})$ morph-konvex.
- 2) Für jede kompakte Teilmenge $K \subset R$ ist $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}(K)$ kompakt. Dann gibt es zu jedem stetigen Homomorphismus φ von $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{C}$ einen Punkt $x \in R$ mit $\varphi(f) = f(x)$ für alle $f \in \mathcal{F}$.----

Die Voraussetzungen des Satzes sind wegen Theorem 17.2 für einen holomorph-konvexen Raum erfüllt, aber auch für einen beliebigen lokal-kompakten Raum R versehen mit der Algebra $\mathcal{C}(R)$ aller stetigen Funktionen auf R .

Beweis: Da φ stetig ist, gibt es eine Umgebung $V(0, K, \varepsilon)$ der Nullfunktion, so daß $|\varphi(f)| < 1$ für $f \in V$.

$$V(0, K, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{F} : \|f|K\| < \varepsilon\}, K \text{ kompakt}, \varepsilon > 0$$

Es gilt sogar

$$(+)\quad \|f|K\| < 1 \quad \supset \quad |\varphi(f)| < 1$$

denn aus $\|f|_K\| < 1$ folgt $\|f^n|_K\| < \varepsilon$ für genügend großes n ,
daraus folgt $|\varphi(f^n)| = |\varphi(f)^n| = |\varphi(f)|^n < 1$, d.f. $|\varphi(f)| < 1$.

Für jedes $f \in \mathcal{F}$ gilt $\|f|_K\| = \|f|_X\|$, wobei $X = h_{\mathcal{F}}(K)$. Zusammen mit (+) folgt daraus $|\varphi(f)| \leq \|f|_X\|$. Man kann deshalb φ zu einem Homomorphismus von $\overline{\mathcal{F}|X}$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen. Da $(X, \overline{\mathcal{F}|X})$ morph-konvex ist, gibt es einen Punkt $x \in X$ mit $\varphi(f) = f(x)$ für alle $f \in \mathcal{F}$. q.e.d.

Aus Theorem 17.2 läßt sich ableiten:

Satz 17.4 Sei R ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, $\mathcal{O}$ die Algebra der auf ihm holomorphen Funktionen. K sei eine kompakte Teilmenge von R und $X = h_{\mathcal{O}}(K)$. Dann ist die Morphiehülle von $(K, \overline{\mathcal{O}|K})$ gleich $(X, \overline{\mathcal{O}|X})$ und es gilt $\overline{\mathcal{O}|X} = \mathcal{H}(X)$.---

Beweis: $\overline{\mathcal{O}|K}$ ist isomorph zu $\overline{\mathcal{O}|X}$ und $(X, \overline{\mathcal{O}|X})$ ist morph-vollständig. Daraus folgt die erste Behauptung (Corollar 7.4). Die zweite Behauptung folgt aus Corollar 16.3 zusammen mit Satz 15.3.

Satz 17.4 kann dazu dienen, folgende Aussage zu beweisen:

Satz 17.5 Seien R_i ($i=1, \dots, n$) holomorph-vollständige Räume, $R = \prod_{i=1}^n R_i$ ihr Produkt. Dann liegen die Funktionen f der Gestalt

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m f_{1k}(x_1) f_{2k}(x_2) \dots f_{nk}(x_n),$$

wobei $f_{ik} \in \mathcal{O}_i$ (auf R_i holomorphe Funktionen), dicht in der Algebra $\mathcal{O}$ der auf R holomorphen Funktionen.---

Bemerkung: Für $R_i = \mathbb{C}^{r_i}$ ist dieser Satz trivial.

Beweis: Sei h eine beliebige Funktion aus $\mathcal{O}$. Zu zeigen

ist, daß in jeder Umgebung von h eine Funktion der speziellen Gestalt liegt. Sei $V(h, K, \varepsilon) = \{f : \|f - h\|_K < \varepsilon\}$ (K kompakt, $\varepsilon > 0$) eine Umgebung von h . $\text{pr}_1(K)$ ist kompakt, also auch $X_1 := \mathcal{H}_1(\text{pr}_1(K))$ und $X := \prod X_1$. $V(h, X, \varepsilon)$ ist in $V(h, K, \varepsilon)$ enthalten und in $V(h, X, \varepsilon)$ liegt schon eine Funktion der Gestalt $\sum_{k=1}^m f_{1k}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{nk}(x_n)$. Dies folgt daraus, daß $h|_X \in \mathcal{H}(X)$ und $\mathcal{H}(X) = \bigotimes \mathcal{H}(X_1)$ (Satz 16.4), sowie $\mathcal{H}(X_1) = \overline{\mathcal{Q}_1 X_1}$ (Satz 17.4). q.e.d.

Bemerkung: Ein entsprechender Satz gilt auch, wenn man statt der holomorph-vollständigen Räume beliebige lokal-kompakte Räume und statt der holomorphen Funktionen alle stetigen Funktionen nimmt. Anstelle von Satz 16.4 hat man dann den Satz von Dieudonné (13.3) zu verwenden.

Satz 17.6 Ist in einem komplexen Raum R eine kompakte Menge X Durchschnitt von holomorph-vollständigen Teilräumen von R , so ist $(X, \mathcal{H}(X))$ morph-vollständig.---

Beweis: Da der Durchschnitt zweier holomorph-vollständiger Räume wieder holomorph-vollständig ist, gibt es eine gerichtete Indexmenge I (d.h. in I ist eine Relation $<$ erklärt und zu $i, j \in I$ gibt es ein $k \in I$ mit $i, j < k$), so daß R_i , $i \in I$, holomorph-vollständige Teilräume sind mit $R_j \subset R_i$ für $i < j$ und $X = \bigcap_{i \in I} R_i$. $\mathcal{O}_i$ seien die in R_i holomorphen Funktionen. Man bilde

$$X_1 := \bigcap_{h \in \mathcal{O}_1} \left\{ y \in R_1 : |h(y)| \leq \sup_{x \in X} |h(x)| \right\}.$$

Es gilt:

$$X_1 \text{ kompakt}$$

$$X = \bigcap X_1$$

$$X_j \subset X_i \text{ für } i < j$$

$$\begin{array}{l} \overline{\mathcal{O}_i | X_i} = \mathcal{H}(X_i) \\ (X_i, \mathcal{H}(X_i)) \text{ morph-vollst\"andig} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \overline{\mathcal{O}_i | X_i} = \mathcal{H}(X_i) \\ (X_i, \mathcal{H}(X_i)) \text{ morph-vollst\"andig} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{nach} \\ \text{Satz 17.4} \end{array}$$

$$\mathcal{H}(X) = \overline{\bigcup \mathcal{H}(X_i) | X}$$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{H}(X))$. φ gibt in nat\"urlicher Weise zu Homomorphismen $\varphi_i \in \mathcal{G}(\mathcal{H}(X_i))$ Anla\ss, die jeweils einem Punkt $x_i \in X_i$ entsprechen. F\"ur $i < j$ ist $x_i = x_j$. W\"are n\"amlich $x_i \neq x_j$, so g\"abe es eine Funktion $f \in \mathcal{H}(X_i)$ mit $f(x_i) \neq f(x_j)$ und es g\"alte $f(x_i) = \varphi_i(f) = \varphi_j(f|X_j) = f(x_j)$, Widerspruch! Daraus folgt, da\ss alle x_i untereinander gleich sind: $x_i = x$ f\"ur alle $i \in I$, d.f. $x \in X$, und man sieht, da\ss φ dem Punkt x entspricht. q.e.d.

Corollar 17.7 Ist X eine kompakte Teilmenge einer nicht-kompakten (eindimensionalen) Riemannschen Fl\"ache R , so ist $(X, \mathcal{H}(X))$ morph-vollst\"andig.---

Jede offene Umgebung von X ist n\"amlich ein holomorph-vollst\"andiger Teilraum von R .

Hieraus ergibt sich als Spezialfall wiederum Satz 17.1.

LITERATURVERZEICHNIS

- [AC] R.ARENS and A.P.CALDERÓN: Analytic functions of several Banach algebra elements. Ann. of Math. 62 (1955) 204-216
- [AS] R.ARENS and I.M.SINGER: Function values as boundary integrals. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 735-745
- [A] G. AUMANN: Reelle Funktionen. Springer, Berlin 1954
- [BS] H.BEHNKE und K.STEIN: Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. 120 (1947/49) 430-461
- [B1] N.BOURBAKI: Topologie générale. Hermann, Paris 1953
- [B2] N.BOURBAKI: Espaces vectorielles topologiques. Hermann, Paris 1955
- [Br] H.J.BREMERMANN: On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains. Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959) 246-276
- [C1] H.CARTAN: Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes. Bull. Soc. Math. France 78 (1950) 28-64
- [C2] H.CARTAN: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles (1953) 41-55
- [D] J.DIEUDONNÉ: Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de 2 espaces compacts. C.R. Acad. Sci. Paris 205 (1937) 593-595

- [GRS] I.M.GELFAND, D.A.RAJKOV und G.E.ŠILOV: Kommutative normierte Ringe (russ.). Uspechi Mat. Nauk 1, No.2 (1946) 48-146. Englische Übersetzung in Amer. Math. Soc. Translations, Series 2, 5 (1957)
- [G] H.GRAUERT: Charakterisierung der holomorph-vollständigen Räume. Math. Ann. 129 (1955) 233-259
- [GR1] H.GRAUERT und R.REMMERT: Bilder und Urbilder analytischer Garben. Ann. of Math. 68 (1958) 393-443
- [GR2] H.GRAUERT und R.REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. 136 (1958) 245-318
- [HQ] H.HELSON and F.QUIGLEY: Existence of maximal ideals in algebras of continuous functions. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 115-119
- [I] R.IWAHASHI: A characterization of holomorphically complete spaces. Proc. Japan Acad. 36, No. 4 (1960) 205-206
- [K1] H.KERNER: Holomorphiehüllen zu K-vollständigen komplexen Räumen. Math. Ann. 138 (1959) 316-328
- [K2] H.KERNER: Über die Fortsetzung holomorpher Abbildungen. Arch. Math. 11 (1960) 44-49
- [L] L.H.LOOMIS: Abstract harmonic analysis. Van Nostrand, New York 1953
- [Ma] E.MARTINELLI: Sur l'extension des théorèmes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles (1953) 109-124

- [M] S.N.MERSELJAN: Über die Darstellung von Funktionen durch Reihen von Polynomen auf abgeschlossenen Mengen (russ.). Doklady Acad. Nauk SSSR 78, No. 3 (1951) 405-408
- [R1] R.REMMERT: Habilitationsschrift. Münster, 1956
- [R2] R.REMMERT: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133 (1957) 328-370
- [Sch] L.SCHWARTZ: Théorie des distributions. Tome 1. Hermann, Paris 1957
- [Ši] G.E.ŠILOV: Über die Zerlegung eines kommutativen normierten Ringes in die direkte Summe von Idealen (russ.). Mat. Sbornik, N.S. 32(74) (1953) 353-364
- [S] K.STEIN: Leçons sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Hektographierte Vorlesung. Varenna 1956
- [W1] A.WEIL: L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Ann. 111 (1935) 178-182
- [W1] J.WERMER: Function rings and Riemann surfaces. Ann. of Math. 67 (1958) 45-71
- [W2] J.WERMER: The hull of a curve in C^n . Ann. of Math. 68 (1958) 550-561

Lebenslauf

Ich bin am 8. Juli 1937 in München als Sohn des Buchhalters Otto Forster († 1948) und seiner Ehefrau Maria, geb. Seemann, geboren.

Die Volksschule besuchte ich ab September 1943 in München, 1944 bis zum Kriegsende 1945 in Lindenberg/Allgäu, dann wieder in München. Im September 1947 trat ich in die Maria-Theresia-Oberrealschule ein. Dort legte ich im Juni 1956 die Reifeprüfung ab.

Seit November 1956 studiere ich Mathematik und Physik an der Universität München. Ich hörte Vorlesungen bei G. Aumann, F. Bopp, W. Gerlach, M. Kneser, H.-W. Knobloch, H. Koppe, W. Maak, F. Möller, O. Perron, H. Richter, A. Schlüter, R. Schmidt, F. Sommer, W. Stegmüller und K. Stein.

Im Sommer bzw. Herbst 1960 legte ich die Diplomprüfung in Mathematik und die Wissenschaftliche Prüfung für das Höhere Lehramt in Mathematik und Physik ab.

München im Mai 1961

Otto Forster

